

Jean **Goulet**
Jean-Pierre **Boutin**
Frédéric **Lerouge**

EDITIONS
LE MONITEUR

AIDE-MÉMOIRE

Résistance des matériaux



- Contraintes et déformations
- Systèmes isostatiques et hyperstatiques
- Poutres, portiques, plaques et coques
- Élasticité, plasticité et dynamique

10^e édition

DUNOD

Graphisme de couverture : Nicolas Hubert

Photographie de couverture : © Ignatius Wooster – Fotolia.com

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements



d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du

droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).

© Dunod, Paris, 1998, 2004, 2008, 2014

ISBN 978-2-10-070849-9

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

Avant-propos

IX

A

Théories de base en domaine élastique

1 ■ Contraintes et déformations	3
1.1 Définitions	3
1.2 Effets produits par l'effort normal : traction et compression simple	5
1.3 Effets produits par le moment de flexion	6
1.4 Effets produits par l'effort tranchant	10
1.5 Effets produits par le moment de torsion	15
1.6 Représentation des contraintes	18
1.7 Contraintes d'équilibre d'un massif	21
1.8 Vérification de la sécurité offerte par une construction	23
2 ■ Caractéristiques des sections transversales des pièces prismatiques	25
2.1 Caractéristiques des sections les plus usuelles	27
2.2 Tables de calcul utilisables dans le cas d'un matériau ne résistant pas à la traction	37

3 ■ Méthodes générales utilisées en résistance des matériaux	43
3.1 Potentiel interne	43
3.2 Théorème de Castigliano	44
3.3 Théorème de Menabrea	44
3.4 Théorème de réciprocité de Maxwell-Betti	45
3.5 Expression analytique des déplacements : formule de Mohr	46
3.6 Principe des travaux virtuels	47
3.7 Théorème des travaux virtuels	47
3.8 Déformation des poutres chargées dans leur plan moyen : formules de Bresse	49
3.9 Lignes d'influence	52

B

Formulaires de poutres, plaques et coques en domaine élastique

4 ■ Systèmes isostatiques	57
4.1 Exemples	57
4.2 Effet d'un convoi sur une poutre droite : théorème de Barré	61
4.3 Méthode graphique	62
4.4 Systèmes en treillis articulé	63
4.5 Arc à trois articulations	67
4.6 Portique à trois articulations	70
4.7 Formulaire de la console	71
4.8 Formulaire de la poutre sur deux appuis simples	74
4.9 Formulaire de la poutre sur deux appuis de niveaux différents	85
4.10 Formulaire de la poutre avec un ou deux appuis rotulés	88
4.11 Formulaire de la poutre d'axe vertical	89
4.12 Formulaire de l'arc parabolique isostatique	90
4.13 Calcul de déplacements par le théorème de Castigliano	94
4.14 Calcul de déplacements par le théorème de réciprocité de Maxwell-Betti	97

5 ■ Systèmes hyperstatiques 101

5.1	Poutres droites hyperstatiques à une travée	101
5.2	Poutres continues	119
5.3	Systèmes de poutres croisées	134
5.4	Poutres sur appui élastique continu	137
5.5	Poutre courbe	152
5.6	Anneaux avec chargement symétrique dans leur plan	158
5.7	Portiques	169
5.8	Arcs hyperstatiques	191

6 ■ Plaques 205

6.1	Formules fondamentales	205
6.2	Plaques rectangulaires	207
6.3	Plaques circulaires	232
6.4	Plaques annulaires	237
6.5	Plaques elliptiques	240
6.6	Plaques triangulaires	241
6.7	Plaque sur appui élastique continu	243
6.8	Effet d'un gradient de température	244

7 ■ Coques 245

7.1	Coques sans flexion	246
7.2	Coques cylindriques fléchies	252

C**Domaine plastique et comportements particuliers****8 ■ Stabilité de l'équilibre élastique 265**

8.1	Flambement des pièces élancées	265
8.2	Déversement latéral des poutres	281
8.3	Flambement des arcs et anneaux	284

8.4	Voilement d'une plaque rectangulaire	286
8.5	Cloquage des voiles minces	287

9 ■ Plasticité **289**

9.1	Lois de la déformation plastique	289
9.2	États d'équilibre limite	290
9.3	Théorème fondamental d'adaptation	292
9.4	Application de la théorie de la plasticité aux plaques	294

10 ■ Dynamique **309**

10.1	Oscillateur simple avec translation	310
10.2	Oscillateur simple avec rotation	317
10.3	Oscillateur multiple	318
10.4	Pulsation du mode propre fondamental	326

Index	331
-------	-----

Avant-propos

Cet aide-mémoire expose toutes les méthodes théoriques et pratiques permettant de réaliser des calculs de résistance des matériaux.

Le lecteur y trouvera les fondamentaux notamment, avec les rappels des notions et méthodes de base, des formulaires sur les poutres, les portiques, les plaques et les coques ainsi qu'un chapitre donnant les éléments essentiels à connaître dans le domaine du calcul dynamique. De nombreux exemples et études de cas viennent illustrer chaque méthode permettant de limiter le recours et la mise en œuvre des logiciels de calcul aux situations véritablement complexes.

Entièrement actualisée et corrigée avec un souci de cohérence des notations, cette 10^e édition propose une nouvelle mise en pages pour faciliter la lecture. Les conventions adoptées restent inspirées du domaine du génie civil (travaux publics, constructions en béton armé...) et présentent en conséquence des différences de signes et de notations avec celles du génie mécanique. Un minimum d'attention permettra néanmoins de s'y retrouver aisément.

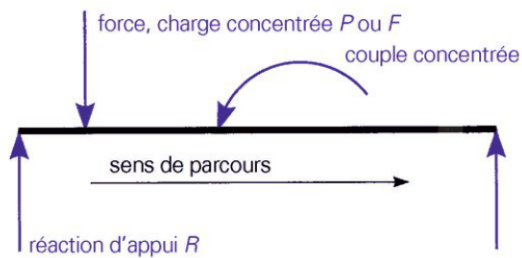
Cet ouvrage constitue un support de travail indispensable aux ingénieurs et techniciens en activité et sera également une référence utile aux étudiants du domaine.

Les auteurs

Principales notations et conventions de signes

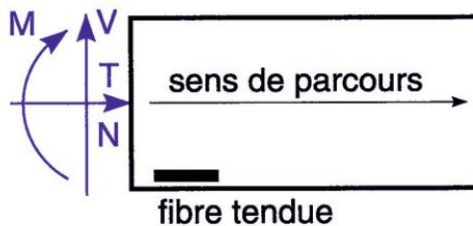
Les principales notations et conventions de signes rencontrées dans le présent ouvrage sont indiquées ci-après :

Efforts extérieurs



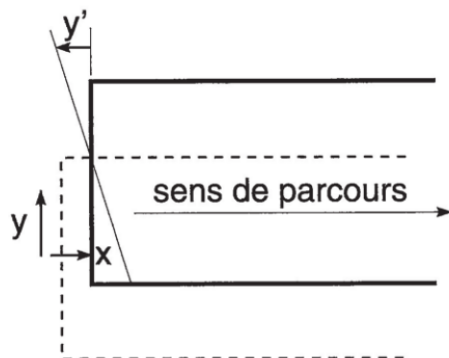
P, F : force, charge concentrée
 p : charge répartie
 C : couple concentré
 c : couple réparti
 R : réaction d'appui

Éléments de réduction des forces de gauche



V : effort, tranchant
 N : effort normal
 M : moment de flexion
 T : moment de torsion

Déformations



x : translation parallèle au sens de parcours
 y : translation perpendiculaire au sens de parcours
 y' : rotation

A

Théories de base en domaine élastique

1

Contraintes et déformations

1.1 Définitions

La Résistance des Matériaux a pour objet l'étude de l'équilibre externe et interne des solides constituant les constructions. Elle s'applique principalement aux poutres solides comportant une dimension longue devant les deux autres transversales. La ligne moyenne d'une poutre supporte la succession de ces sections droites transversales.

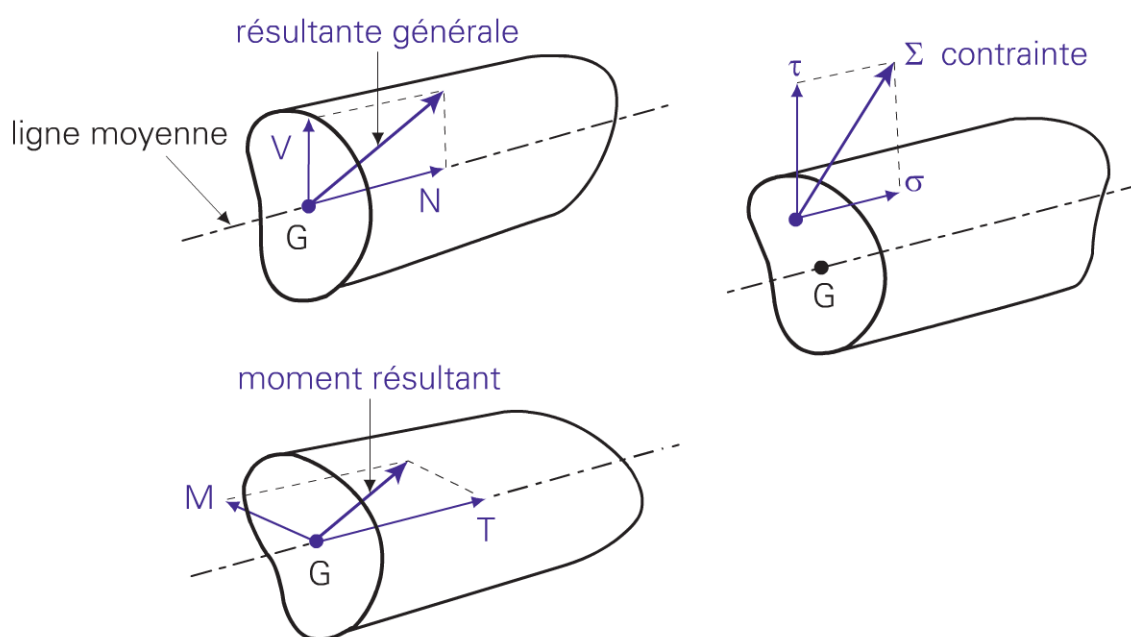


Figure 1.1

Cette étude nécessite, d'une part la vérification de l'équilibre statique, d'autre part la recherche des valeurs des contraintes et des déformations propres subies par un corps donné, soumis à un système de forces

extérieures ; parmi ces forces sont comptées les charges permanentes (comprenant en particulier, le poids propre du corps négligé parfois devant les autres charges prépondérantes notamment pour les corps de faible masse), les charges variables dans le temps et les réactions d'appui (ou forces de liaison) nécessaires à l'équilibre du corps.

Forces intérieures et contraintes

Dans toute section pratiquée dans un solide et en tout point, les forces intérieures et les contraintes Σ (forces par unité de surface) peuvent être déterminées, dans certaines hypothèses énoncées ci-après, à partir de la résultante générale et du moment résultant des forces extérieures ; ces deux éléments de réduction se décomposent, au point de calcul situé au centre de gravité de la section G , en l'effort normal (N) perpendiculaire au plan de la section, l'effort tranchant (V) agissant dans le plan de la section, le moment de flexion (M) dans le plan de la section et le moment de torsion (T) perpendiculaire au plan de la section.

On distingue pour une contrainte Σ en un point, les composantes normale σ et tangentielle τ à la section droite.

Hypothèses et principes de base de la résistance des matériaux

- 1) Les déformations du corps sont supposées très petites et sans influence sur l'intensité et la direction des forces appliquées, et sur les conditions d'équilibre du corps (sauf notamment dans l'étude des corps sur appuis élastiques et dans l'étude du flambement).
- 2) Entre deux sections voisines d'une pièce prismatique, les variations de forme et d'étendue de section sont supposées être très progressives.
- 3) La section droite (perpendiculaire à la fibre moyenne) d'une pièce prismatique reste plane après l'application des forces sur la pièce ; c'est l'hypothèse de Navier-Bernoulli.
- 4) Dans le domaine de l'élasticité de la matière, les déformations sont proportionnelles aux contraintes ; c'est la loi de Hooke.

5) La généralisation de la loi de Hooke conduit au principe de superposition des effets des forces, selon lequel l'effet produit par un ensemble de forces est égal à la somme des effets produits par chaque force considérée isolément.

6) Les contraintes, et par suite les déformations, dans une région éloignée des points d'application d'un système de forces (y compris des forces de liaisons), ne dépendent que de la résultante générale et du moment résultant de ce système de forces ; c'est le principe énoncé par Saint-Venant.

1.2 Effets produits par l'effort normal : traction et compression simple

Soit une pièce homogène de section constante présentant une aire Ω , uniquement soumise à un effort normal N (traction ou compression) ; la **contrainte normale** (de traction ou de compression) est égale à

$$\sigma = \frac{N}{\Omega} \quad (1.1)$$

Les fibres longitudinales de la pièce subissent un allongement ou raccourcissement unitaire égal à

$$i = \frac{\Delta \ell}{l} = -\frac{\sigma}{E} = -\frac{N}{\Omega E} \quad (1.2)$$

E est appelé **module d'élasticité longitudinale** ou module d'Young.

Simultanément, la dimension transversale b de la pièce subit une variation relative

$$\frac{\Delta b}{b} = -\nu \frac{\Delta \ell}{\ell} = -\nu i \quad (1.3)$$

- ν est un coefficient sans dimension, appelé coefficient de Poisson.
- Les valeurs de E et ν sont variables suivant la nature des matériaux.
- Notons que pour un matériau homogène, isotrope et incompressible : $\nu < 0,5$.

1.3 Effets produits par le moment de flexion

1.3.1 Flexion plane simple

Considérons une poutre droite à plan moyen, fléchie dans son plan de symétrie, soumise uniquement à un moment de flexion M , porté par l'axe Gz .

On démontre que la section subit des **contraintes normales** dont la valeur est donnée par l'expression :

$$\sigma = \frac{My}{I} \quad (1.4)$$

I désignant le moment quadratique de la section par rapport à l'axe Gz .

Le diagramme des contraintes est linéaire et présente des valeurs maximales sur les fibres les plus éloignées de l'axe Gz ; en flexion plane simple, l'axe neutre qui correspond aux fibres ne subissant aucune contrainte, est confondu avec Gz .

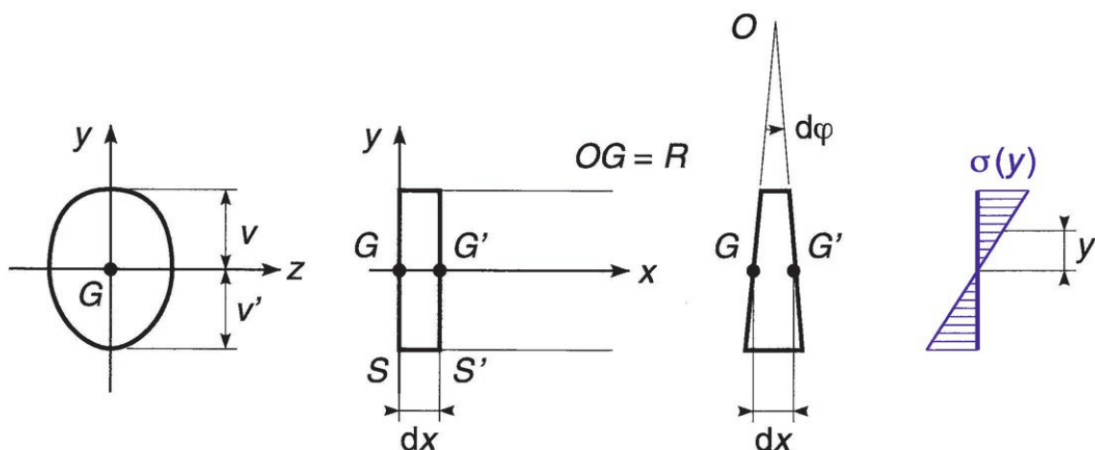


Figure 1.2

Dans le cas de la figure 1.2, la contrainte maximale de compression est égale à $M/\frac{I}{v}$; la contrainte extrême de traction est égale à $-M/\frac{I}{v'}$;

$\frac{I}{v}$ et $\frac{I}{v'}$ sont les modules de flexion de la section.

Les valeurs caractéristiques I , $\frac{I}{v}$ et $\frac{I}{v'}$ sont données au chapitre 2 pour les sections les plus courantes.

La déformation se traduit par une **rotation relative** des sections S et S' :

$$d\varphi = \frac{M}{EI} dx \quad (1.5)$$

La fibre moyenne ne subit aucune variation de longueur. Le **rayon de courbure** de la fibre moyenne déformée est :

$$R = \frac{dx}{d\varphi} = \frac{EI}{M} \quad (1.6)$$

Lorsque le moment de flexion est constant, la poutre de moment quadratique constant, initialement droite, prend la forme d'un arc de cercle ; dans ce cas la flexion est dite circulaire.

1.3.2 Flexion déviée

Lorsque l'axe du moment de flexion M ne coïncide pas avec l'un des axes dits principaux de la section, la flexion est dite déviée. Les axes principaux sont les deux axes perpendiculaires de la section autour desquels les moments quadratiques sont extremums. Tout axe de symétrie est axe principal. Dans le cas d'une flexion déviée, on décompose le moment M en ses composantes M_y et M_z suivant les axes principaux de section ; puis, en appliquant le principe de superposition, on obtient la contrainte normale au point de coordonnées (y, z) :

$$\sigma = \frac{M_z y}{I_z} - \frac{M_y z}{I_y} \quad (1.7)$$

L'axe neutre passe par le centre de surface de la section ; il est défini par l'équation précédente dans laquelle on écrit $\sigma = 0$.

Lorsque la section est repérée dans un système d'axes $Gx'y'z'$, avec Gx' tangent à la ligne moyenne et Gy', Gz' quelconques dans le plan de la section droite, les axes principaux Gy et Gz sont repérés par l'angle α tel que :

$$\tan 2\alpha = \frac{2I_{y'z'}}{I_{z'} - I_{y'}}$$

Les moments quadratiques principaux ont pour valeurs :

$$I_y = I_{y'} \cos^2 \alpha + I_{z'} \sin^2 \alpha - I_{y'z'} \sin 2\alpha$$

$$I_z = I_{y'} \sin^2 \alpha + I_{z'} \cos^2 \alpha + I_{y'z'} \sin 2\alpha$$

1.3.3 Flexion composée (ou flexion plane)

Lorsque le moment de flexion M est accompagné d'un effort normal N , la section est soumise à la flexion composée (ou flexion plane).

Toujours par application du principe de superposition, on trouve que la contrainte au point de coordonnées (y, z) est égale à :

$$\sigma = \frac{N}{\Omega} + \frac{M_z y}{I_z} - \frac{M_y z}{I_y} \quad (1.8)$$

L'axe neutre est défini par l'équation précédente dans laquelle on écrit $\sigma = 0$; on voit qu'il ne passe plus par le point G .

Le système des forces appliquées à la section est équivalent à une force unique qui passe par un point C , situé dans le plan de la section, appelé **centre de pression**, et dont les coordonnées sont :

$$y_1 = \frac{M_z}{N} \quad z_1 = -\frac{M_y}{N}$$

Avec ces nouvelles notations, l'équation de l'axe neutre peut s'écrire :

$$\frac{yy_1}{I_z} + \frac{zz_1}{I_y} + \frac{1}{\Omega} = 0 \quad (1.9)$$

Il apparaît donc que les coordonnées du centre de pression suffisent à déterminer l'axe neutre.

Lorsque le centre de pression se trouve à l'intérieur d'un domaine caractéristique de la section, appelé **noyau central**, l'axe neutre est extérieur à la section et les contraintes sont toutes de même signe sur toute l'étendue de la section ; lorsque le centre de pression se trouve sur la frontière de ce domaine, l'axe neutre est tangent au contour de la section ; lorsque le centre de pression se trouve hors du noyau central, l'axe neutre coupe la section et les contraintes, de part et d'autre de cet axe, sont de signes contraires.

Nous précisons au chapitre 2, pour les sections courantes, la forme et les dimensions du noyau central.

Cas des matériaux dont la résistance à la traction est nulle ou négligeable :

maçonnerie, béton non armé, base d'appui d'une fondation sur le sol.

Dans ce cas, lorsque le centre de pression sort du noyau central, il n'est plus possible d'utiliser la formule (1.8). Les tables de calcul utilisables pour les sections rectangulaires, circulaires ou annulaires se trouvent à la fin du chapitre 2.

Cas particulier de la section rectangulaire soumise à la flexion composée non déviée.

L'application de la formule (1.8) conduit, avec :

$$M_y = 0, \quad M_z = Ny_1 \quad \text{et} \quad I_z = \frac{bh^3}{12}$$

aux contraintes suivantes :

$$\text{arête la plus comprimée} \quad \sigma = \frac{N}{bh} + \frac{6M_z}{bh^2} = \frac{N}{\Omega} \left(1 + 6 \frac{y_1}{h} \right) \quad (1.10)$$

$$\text{arête opposée} \quad \sigma = \frac{N}{bh} - \frac{6M_z}{bh^2} = \frac{N}{\Omega} \left(1 - 6 \frac{y_1}{h} \right) \quad (1.11)$$

cette dernière contrainte s'annule pour $y_1 = \frac{h}{6}$, ; si y_1 est supérieur à $\frac{h}{6}$ le centre de pression est hors du noyau central et des contraintes de traction apparaissent dans la section.

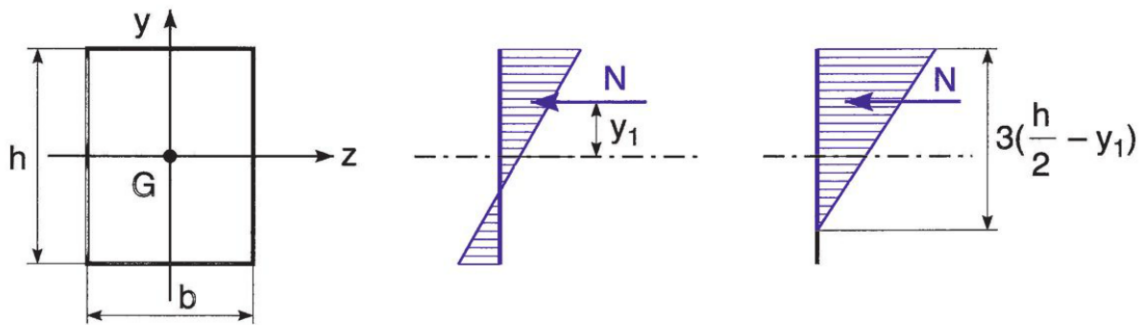


Figure 1.3

Dans ce cas, les formules (1.10) et (1.11) ne sont plus applicables à un matériau ne résistant pas à la traction ; la résultante des contraintes de compression devant coïncider avec le centre de pression, la hauteur de section comprimée est égale à $3\left(\frac{h}{2} - y_1\right)$; la contrainte sur la fibre la plus comprimée est :

$$\sigma = \frac{2N}{3b\left(\frac{h}{2} - y_1\right)} \quad (1.12)$$

1.4 Effets produits par l'effort tranchant

Relation entre moment de flexion et effort tranchant

Considérons la poutre droite envisagée dans l'étude de la flexion ; on démontre que dans une section de la poutre, où n'agit pas de charge concentrée ou de couple extérieur, l'**effort tranchant** V est lié au moment de flexion par la relation :

$$\frac{dM}{dx} = V \quad (1.13)$$

1.4.1 Valeur de la contrainte de cisaillement

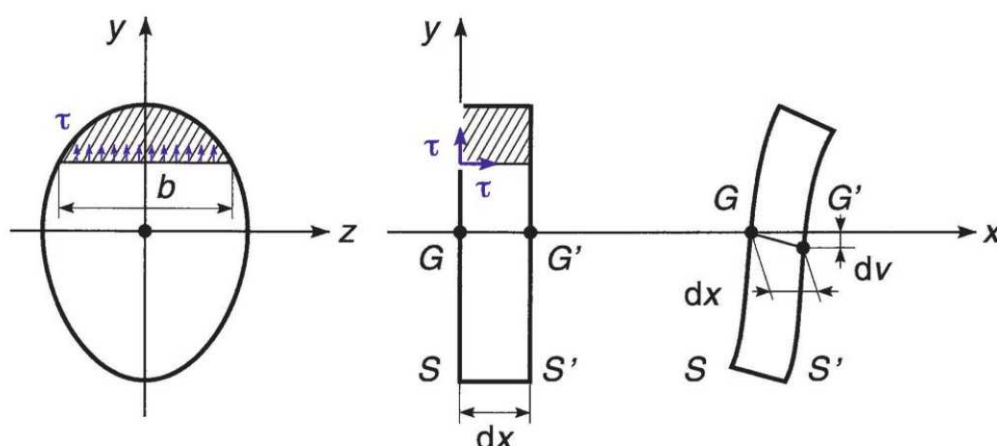


Figure 1.4

Hypothèse simplificatrice

En raison de sa répartition complexe suivant le type de section, on suppose communément qu'en tout point de la section droite, la contrainte de cisaillement τ est parallèle à Gy et que sa valeur ne dépend pas de z . Si par ailleurs on pose :

b = largeur de la section au niveau où l'on calcule τ

m = moment statique par rapport à Gz de la partie de la section située au-dessus du niveau considéré

I = moment quadratique de l'ensemble de la section par rapport à Gz ,

on trouve que la contrainte de cisaillement est égale à :

$$\tau = \frac{Vm}{Ib} \quad (1.14)$$

L'hypothèse simplificatrice reste très satisfaisante pour les sections massives. Ce n'est pas le cas des sections à parois minces.

Selon le théorème de Cauchy, la contrainte de cisaillement longitudinale, c'est-à-dire dans le plan horizontal, à la même valeur que la précédente.

L'effort de glissement longitudinal par unité de longueur de poutre, au niveau considéré, est donc égal à $\frac{Vm}{I}$.

La contrainte de cisaillement est maximale à un niveau qui dépend de la forme de la section.

Pour chaque forme de section, on peut définir une section réduite Ω' telle que le rapport $\frac{V}{\Omega'}$ fournit la valeur de la contrainte de cisaillement maximale.

1.4.2 Déformation produite par l'effort tranchant

Elle se traduit par un déplacement relatif de deux sections voisines S et S' , distantes de dx , correspondant à une translation dv parallèle à l'effort tranchant, telle que :

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{V}{G\Omega_1} \quad (1.15)$$

G est le *module d'élasticité transversale* (ou module de Coulomb), sa valeur est (matériaux isotropes) :

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (1.16)$$

Ω_1 est la section réduite à prendre en compte pour le calcul de la déformation d'effort tranchant.

Les valeurs de Ω' et Ω_1 sont données au chapitre B, pour certaines sections usuelles.

1.4.3 Poutre ne possédant pas de plan moyen de symétrie parallèle à l'effort tranchant. Centre de torsion

Centre de torsion

Lorsqu'une section symétrique par rapport à Gz n'admet pas Gy comme axe de symétrie, les éléments de réduction qui résultent des contraintes de cisaillement produites par un effort tranchant V parallèle à Gy , comportent un moment résultant nul non pas au centre de surface G mais en un point C situé sur l'axe Gz , appelé **centre de torsion**.

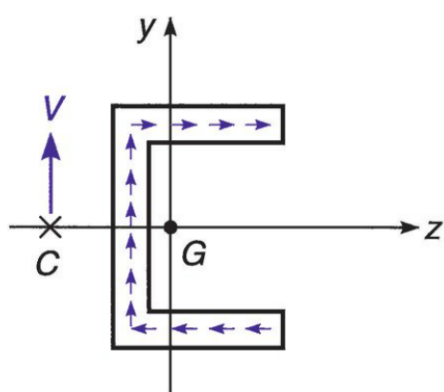


Figure 1.5

Si les forces extérieures sont situées dans le plan parallèle à Gy passant par le centre de torsion, la résultante des contraintes de torsion, la résultante des contraintes de cisaillement est équivalente à l'effort tranchant ; sinon, avec les conventions habituelles (calcul en G), un moment de torsion parasite apparaît dans la poutre, et les contraintes de cisaillement correspondantes doivent être superposées à celles qui résultent de la formule (1.14).

La position du centre de torsion pour certaines sections particulières, est donnée ci-dessous :

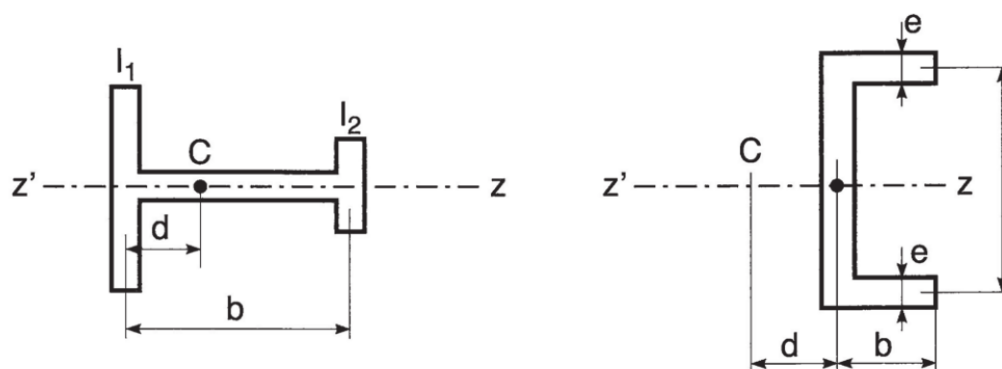


Figure 1.6

$$d = b \frac{I_2}{I_1 + I_2} \quad (1.17)$$

$$d = \frac{b^2 h^2 e}{4I} \quad (1.18)$$

I_1 et I_2 sont les moments quadratiques des ailes inégales de la poutrelle, par rapport à $z'z$.

I est le moment quadratique de la section totale, par rapport à $z'z$.

Pour les fers cornières et pour les fers en T, le centre de torsion se trouve sensiblement à l'intersection des axes des ailes, ou de l'aile et de l'âme.

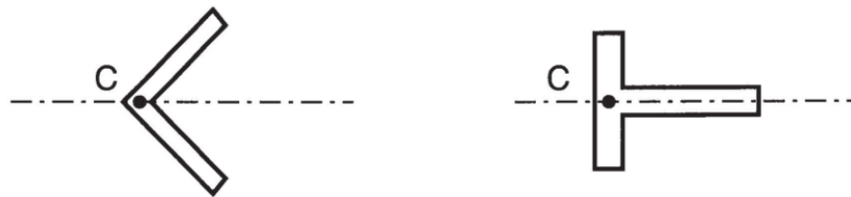


Figure 1.7

1.4.4 Effort tranchant fictif dans les poutres de hauteur variable

En flexion plane simple, on peut calculer les contraintes de cisaillement, à partir de l'effort tranchant fictif :

$$V' = V - \frac{2M \tan \alpha}{h} \quad (1.19)$$

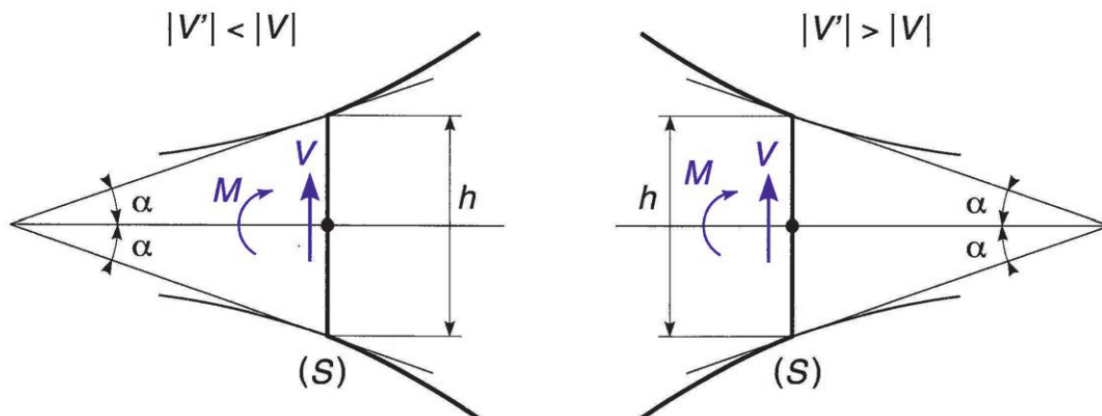


Figure 1.8

L'effort tranchant est réduit en valeur absolue, quand la valeur absolue de M augmente en même temps que la hauteur h ; il est augmenté dans le cas contraire. Dans le premier cas, V' est désigné par le nom d'**effort tranchant réduit**.

1.5 Effets produits par le moment de torsion

Considérons une poutre de section circulaire pleine ou évidée, soumise à un moment de torsion T .

Dans la section S' , la contrainte de cisaillement au point P est perpendiculaire au rayon $G'P$ et proportionnelle à la distance $G'P = r$; elle est donnée par :

$$\tau = \frac{Tr}{J} \quad (1.20)$$

Le déplacement relatif de deux sections voisines S et S' distantes de dx est une rotation de $d\theta$ autour de l'axe Gx du moment de torsion, on a :

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{T}{GJ} \quad (1.21)$$

G est le module d'élasticité transversale (se reporter à la formule 1.16).

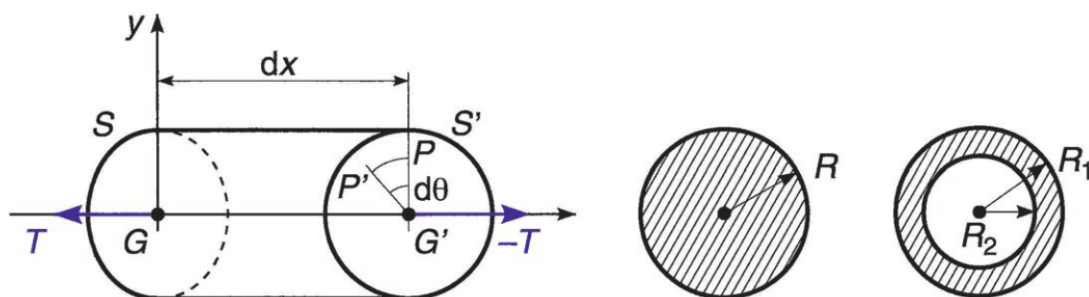


Figure 1.9

J est le moment quadratique polaire, égal à $\frac{\pi R^4}{2}$ pour une section circulaire de rayon R et à $\frac{\pi}{2}(R_1^4 - R_2^4)$ pour une section annulaire.

Dans le cas d'une section de forme quelconque, le calcul doit tenir compte du gauchissement des sections. J est alors qualifié de **constante de torsion**.

1.5.1 Section rectangulaire

Si $e < b$:

$$\tau_{\max} = \frac{T}{k_1 b e^2} \quad (1.22)$$

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{T}{G k_2 b e^3} \quad (1.23)$$

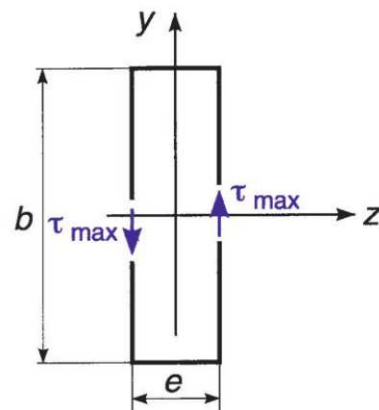


Figure 1.10

k_1 et k_2 sont fonction du rapport $\frac{b}{e}$; les valeurs de ces coefficients sont données par le tableau ci-dessous, tiré du *Cours de Résistance des Matériaux* de M. Courbon.

b/e	1	1,2	1,5	2	2,5	3	4	5	10	∞
k_1	0,208	0,219	0,231	0,246	0,258	0,267	0,282	0,291	0,312	1/3
k_2	0,141	0,166	0,196	0,229	0,249	0,263	0,281	0,291	0,312	1/3

1.5.2 Section rectangulaire étroite

Si $\frac{b}{e} = \infty$, les formules précédentes s'écrivent :

$$\tau_{\max} = \frac{3T}{be^2} \quad (1.24)$$

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{3T}{Gbe^3} \quad (1.25)$$

1.5.3 Profils minces ouverts

dans l'âme

$$\tau_{1\max} = \frac{3Te_1}{b_1e_1^3 + 2b_2e_2^3} \quad (1.26)$$

dans l'aile

$$\tau_{2\max} = \frac{3Te_2}{b_1e_1^3 + 2b_2e_2^3} \quad (1.27)$$

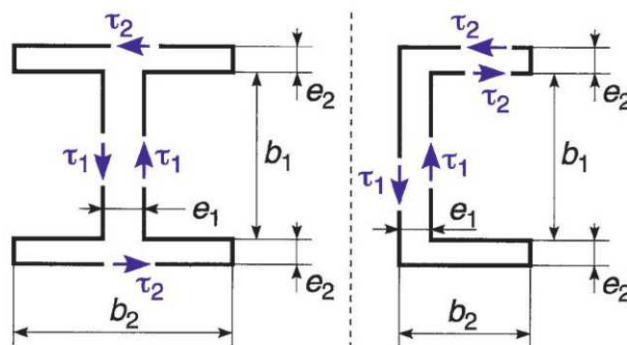


Figure 1.11

déformation

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{3T}{G(b_1e_1^3 + 2b_2e_2^3)} \quad (1.28)$$

1.5.4 Tube mince ouvert

Les formules sont les mêmes que pour la section rectangulaire étroite.

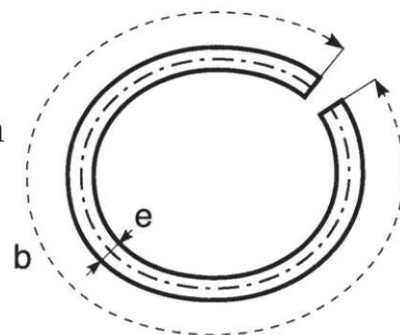


Figure 1.12

1.5.5 Tube mince fermé

On démontre que le flux de cisaillement est constant :

$$\tau e = \tau' e' = \Phi \quad (1.29)$$

S étant ici l'aire limitée par la ligne moyenne Γ , on a :

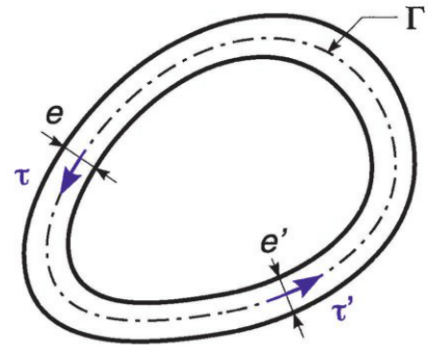


Figure 1.13

$$\tau = \frac{T}{2Se} \quad (1.30)$$

et :

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{T}{GJ} \quad \text{avec} \quad J = \frac{4S^2}{\int_{\Gamma} \frac{ds}{e}} \quad (1.31)$$

Si e est constant et si L est la longueur de la fibre moyenne, alors :

$$J = \frac{4S^2 e}{L} \quad (1.32)$$

1.6 Représentation des contraintes

Cercle de Mohr

On considère en un point O du corps la contrainte qui agit sur une facette plane P passant par ce point, et dont l'orientation est variable. On représente la contrainte par un vecteur $O\Sigma$ dans le plan contenant ce vecteur et la normale On à la facette P .

Le vecteur contrainte est porté par la normale lorsque la facette P coïncide avec une des faces principales.

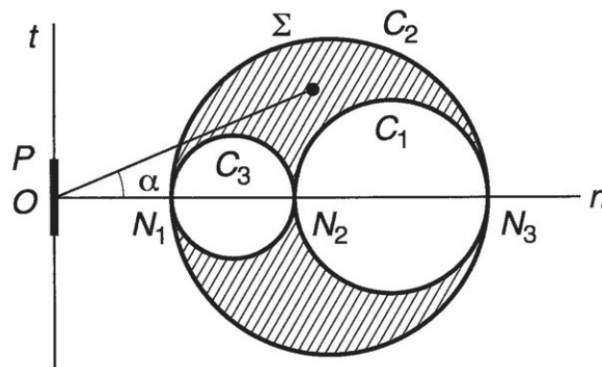


Figure 1.14

Portons sur la normale les contraintes principales N_1 , N_2 , N_3 et construisons les cercles C_1 , C_2 et C_3 ; on démontre que l'extrémité Σ du vecteur contrainte est toujours située à l'intérieur de l'aire hachurée ou sur son contour.

Le cercle C_2 construit sur les contraintes principales extrêmes est appelé **cercle de Mohr** ; l'ensemble des trois cercles forme le tricercle de Mohr.

Les composantes normale et tangentielle de la contrainte sont données par :

$$\sigma = \frac{N_1 + N_3}{2} - \frac{N_3 - N_1}{2} \cos 2\omega \quad (1.33)$$

$$\tau = \frac{N_3 - N_1}{2} \sin 2\omega \quad (1.34)$$

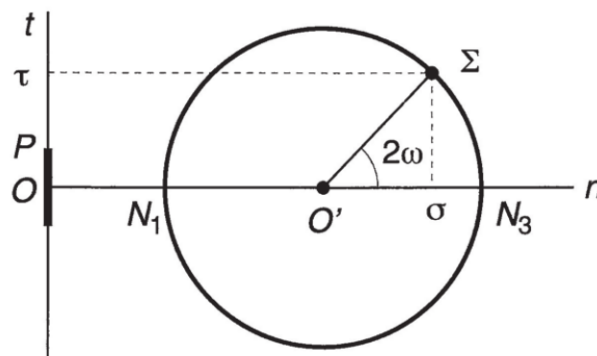


Figure 1.15

Propriété du cercle de Mohr

Lorsque la facette P tourne autour de l'axe principal intermédiaire, le point Σ décrit le cercle de Mohr et si la facette tourne d'un angle ω à partir de la facette principale sur laquelle s'exerce la plus grande contrainte principale N_3 , le rayon du cercle de Mohr tourne de l'angle 2ω .

Construction du cercle de Mohr

On a souvent besoin de construire le cercle de Mohr à partir des contraintes connues $\sigma_1, \sigma_3, \tau_2$ repérées par rapport à deux axes rectangulaires Ox, Oz , les directions principales faisant avec Ox les angles φ et $\varphi + \frac{\pi}{2}$, φ étant tel que :

$$\tan 2\varphi = \frac{2\tau_2}{\sigma_3 - \sigma_1}$$

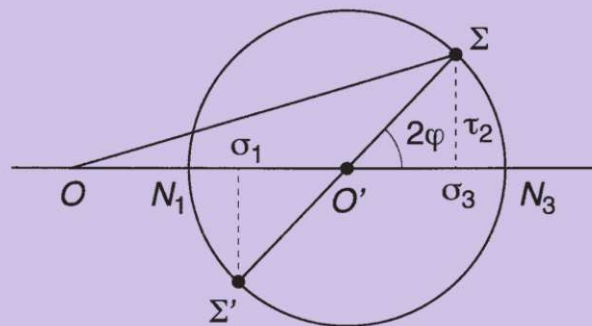


Figure 1.16

Les contraintes principales sont alors :

$$N_1 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \cdot \frac{1}{\cos 2\varphi} \quad (1.35)$$

$$N_3 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \cdot \frac{1}{\cos 2\varphi} \quad (1.36)$$

Courbe intrinsèque

Pour un accroissement donné des sollicitations, la matière peut sortir en O du domaine élastique ; il se produit un glissement d'une facette passant par O sur une facette voisine.

La contrainte sur cette facette est représentée par le vecteur $O\Sigma$ d'obliquité α .

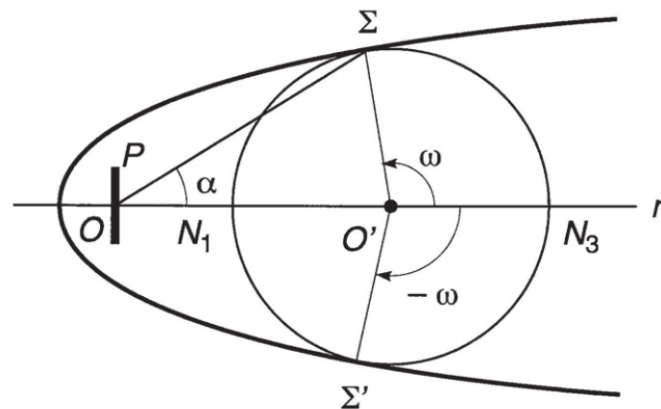


Figure 1.17

Lorsque l'on fait varier les sollicitations, le lieu du point Σ est une courbe symétrique par rapport à On , qui est l'enveloppe des cercles de Mohr correspondants à la plastification, ou à la rupture. Cette courbe est la **courbe intrinsèque** relative au matériau considéré.

Un cercle de Mohr étant tangent en Σ et Σ' à la courbe intrinsèque, la facette P suivant laquelle s'effectue le glissement de déformation permanente, fait avec le plan principal N_2ON_3 l'angle $\frac{\omega}{2}$ ou $-\frac{\omega}{2}$.

On obtient une bonne approximation de la partie généralement utile de la courbe intrinsèque relative à un matériau en traçant les tangentes aux cercles de Mohr correspondants aux situations de traction et de compression simples.

1.7 Contraintes d'équilibre d'un massif

- **Cas 1 :** contraintes le long d'une paroi verticale soutenant un massif semi infini de poids volumique ω , d'angle de frottement φ , limité par un plan incliné de l'angle β sur l'horizontale ; une charge répartie p par unité de surface libre est appliquée.

$$f = \frac{(\omega z + p) \cos^2 \varphi}{\left(\cos \beta + \sqrt{\sin^2 \varphi - \sin^2 \beta} \right)^2}$$

$$n = f \cos \beta$$

$$t = f \sin \beta$$

Cas particulier, $\beta = 0$

$$n = f = (\omega z + p) \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)$$

$$t = 0$$

- **Cas 2 :** Contraintes le long d'une paroi verticale soutenant un massif semi infini limité par un plan horizontal ; une charge linéaire P verticale est appliquée à une distance a de la paroi.

$$n = \frac{2Pa^2 z}{\pi(a^2 + z^2)^2}$$

$$t = \frac{2Paz^2}{\pi(a^2 + z^2)^2}$$

$$n_{\max} = \frac{2P}{\pi z} \quad \text{pour} \quad z = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$t_{\max} = \frac{P}{2\pi a} \quad \text{pour} \quad z = a$$

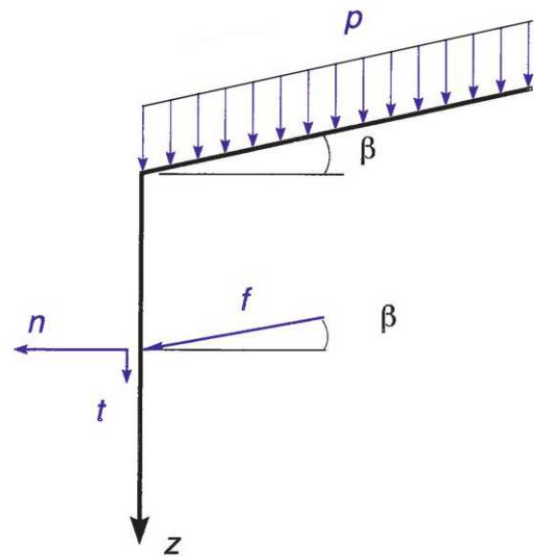


Figure 1.18

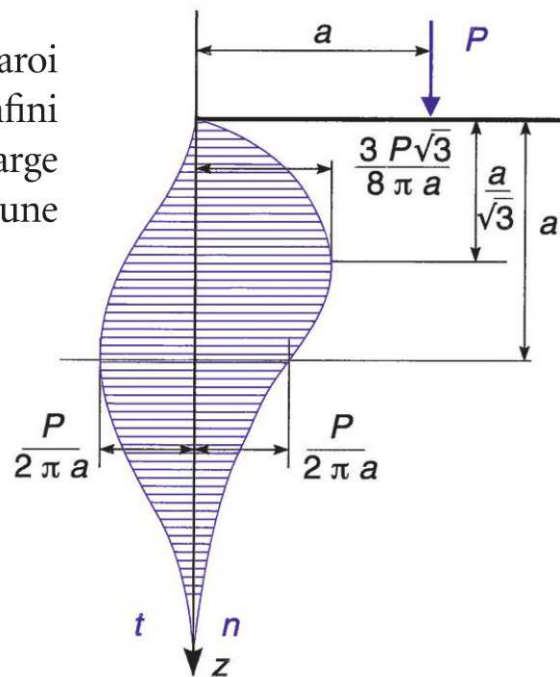


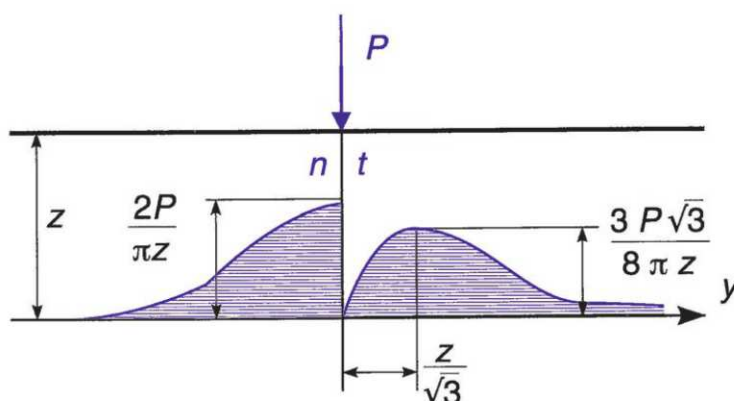
Figure 1.19

- **Cas 3 :** Contraintes à un niveau donné caractérisé par z , d'un massif semi infini à surface libre horizontale et soumis à l'action d'une charge linéaire P verticale.

n et t représentent respectivement les contraintes normale et tangentielle dans le plan horizontal de niveau z .

$$n = \frac{2Pz^3}{\pi(y^2 + z^2)^2}$$

$$t = \frac{2Pz^2y}{\pi(y^2 + z^2)^2}$$



$$n_{\max} = \frac{2P}{\pi z} \quad \text{pour} \quad y = 0$$

Figure 1.20

$$t_{\max} = \frac{3P\sqrt{3}}{8\pi z} \quad \text{pour} \quad y = \pm \frac{z}{\sqrt{3}}$$

1.8 Vérification de la sécurité offerte par une construction

La **méthode dite aux contraintes admissibles** consiste à vérifier qu'en tout point de la construction, les contraintes calculées suivant la théorie élastique, sous l'action des sollicitations de service combinée de la manière la plus défavorable, restent égales ou inférieures aux contraintes *admissibles* obtenues en divisant les résistances conventionnelles élastiques ou de rupture des matériaux par des **coefficients de sécurité** appropriés et dépendant de la nature des contraintes et des sollicitations.

La **méthode dite aux états limites** permet de s'assurer que la construction présente une sécurité suffisante vis-à-vis de sa mise hors-service ; une construction est mise hors-service lorsque l'un ou plusieurs de ses éléments cessent de remplir la fonction pour laquelle ils ont été conçus, par déformation élastique ou plastique excessive, fissuration excessive, rupture, déplacement anormal.

Règles et critères

On se référera prioritairement aux règles normalisées de la zone géographique de la construction (Eurocodes, Règles béton armé...), à défaut aux critères usuels de limite élastique de la résistance des matériaux qui définissent en tout point de la section une contrainte équivalente en cas d'action combinée de contraintes normales et tangentiels. Parmi ces critères appliqués aux poutres, on retiendra notamment les critères suivants (dont on donne le comportement mécanique supposé pour le matériau) :

- Tresca (hypothèse : $R_{eg}/R_e = 0,5$, valable pour les aciers doux, alliages d'aluminium...)

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (1.37)$$

- Von Mises (hypothèse : $R_{eg}/R_e = \sqrt{3}/3$, valable pour les aciers de construction en général)

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \quad (1.38)$$

Nota : R_e et R_{eg} sont respectivement les contraintes de limite élastique en traction et cisaillement du matériau. Les critères restent pertinents dans toutes les situations de contraintes uniquement dans le cadre de l'hypothèse annoncée.

Dans cette méthode aux états limites, le coefficient de sécurité est déterminé par le rapport entre la sollicitation correspondant à la mise hors-service de l'ouvrage et la sollicitation correspondant aux charges et surcharges prévues en service ; à chaque critère de mise hors-service correspond un coefficient de sécurité propre.

Pour les pièces soumises à des efforts alternés répétés un grand nombre de fois, la rupture peut se produire même dans le domaine élastique apparent.

Le domaine élastique vrai ou domaine d'endurance peut être déterminé expérimentalement ; on admet que la contrainte qui n'a pas provoqué de rupture après 10^8 répétitions est voisine de la limite d'endurance.

2

Caractéristiques des sections transversales des pièces prismatiques

Définitions

- **Moment statique** d'une section d'aire Ω par rapport aux axes O_x et O_y

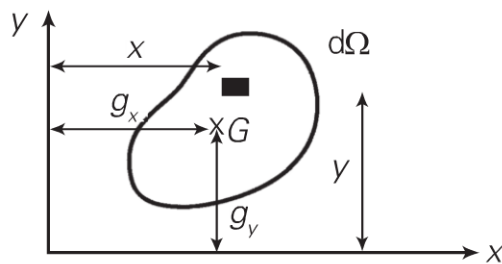


Figure 2.1

$$m_x = \int_{\Omega} y \, d\Omega \quad (2.1)$$

de même :

$$m_y = \int_{\Omega} x \, d\Omega \quad (2.2)$$

- **Centre de surface** : les coordonnées du centre de surface G par rapport aux axes O_x et O_y sont :

$$g_x = \frac{m_y}{\Omega} \quad ; \quad g_y = \frac{m_x}{\Omega} \quad (2.3)$$

- Le **moment quadratique** d'une section d'aire Ω par rapport à l'axe Ox est :

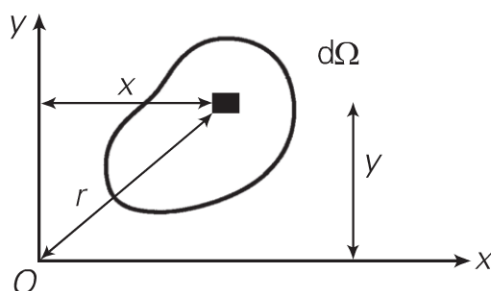


Figure 2.2

$$I_x = \int_{\Omega} y^2 \, d\Omega \quad (2.4)$$

de même :

$$I_y = \int_{\Omega} x^2 \, d\Omega \quad (2.5)$$

— le **moment produit** est :

$$I_{xy} = \int_{\Omega} xy \, d\Omega \quad (2.6)$$

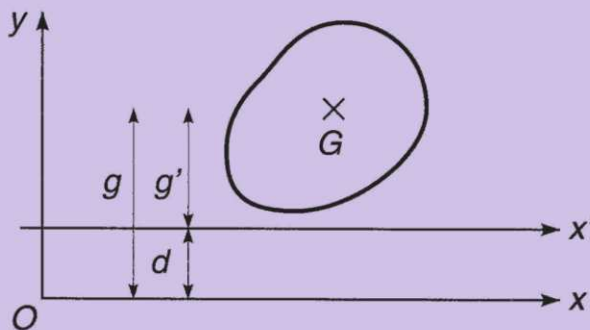
— le **moment quadratique polaire** est :

$$I_p = \int_{\Omega} r^2 \, d\Omega = I_x + I_y \quad (2.7)$$

— le **rayon de giration** de l'aire Ω autour d'un axe quelconque Ou est la longueur ρ_u telle que :

$$\rho_u = \sqrt{\frac{I_u}{\Omega}} \quad (2.8)$$

Conséquences d'un changement d'axe



$$m'_x = m_x - \Omega d \quad (2.9)$$

(d est à prendre en valeur algébrique).

Figure 2.3

$$I'_x = I_x - \Omega (g^2 - g'^2) \quad (2.10)$$

Si l'axe x' passe par G :

$$I_g = I_x - \Omega g^2 = I_x - m_x g \quad (2.11)$$

2.1 Caractéristiques des sections les plus usuelles

(Avec les notations définies au chapitre 1 et ci-dessus.)

2.1.1 Rectangle

■ Flexion

$$I_x = \frac{bh^3}{12} \quad \frac{I_x}{v} = \frac{I_x}{v'} = \frac{bh^2}{6}$$

$$I_y = \frac{b^3h}{12} \quad \frac{I_y}{v} = \frac{I_y}{v'} = \frac{b^2h}{6}$$

$$I_{x'} = \frac{bh^3}{3} \quad I_{y'} = \frac{b^3h}{3}$$

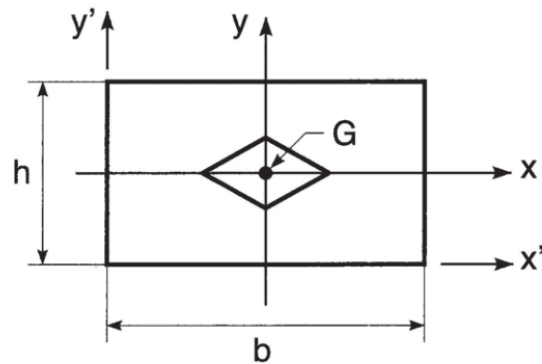


Figure 2.4

Le noyau central est limité par un losange ayant pour centre le point G, et dont les diagonales ont pour longueur $\frac{h}{3}$ et $\frac{b}{3}$.

■ Effort tranchant

$$\Omega' = \frac{2}{3}bh \quad \Omega_1 = \frac{5}{6}bh$$

2.1.2 Section en T

$$\Omega = (b - b')e + b'h$$

$$m_{x'} = \frac{1}{2}[(b - b')e^2 + b'h^2]$$

$$I_{x'} = \frac{1}{3}[(b - b')e^3 + b'h^3]$$

$$v = \frac{m_{x'}}{\Omega} \quad I_x = I_{x'} - m_{x'}v$$

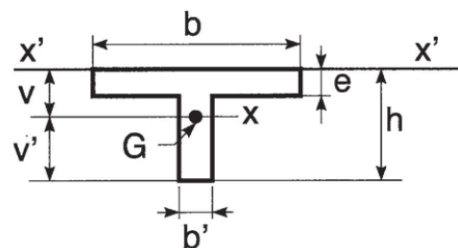


Figure 2.5

Les deux tableaux qui suivent le paragraphe 2.1.6 permettent le calcul de $\frac{I_x}{v'}$, $\frac{I_x}{v}$ et $\frac{v}{h}$ pour les sections en T.

2.1.3 Triangle

$$I_x = \frac{bh^3}{36} \quad \frac{I_x}{v} = \frac{bh^2}{24} \quad \frac{I_x}{v'} = \frac{bh^2}{12}$$

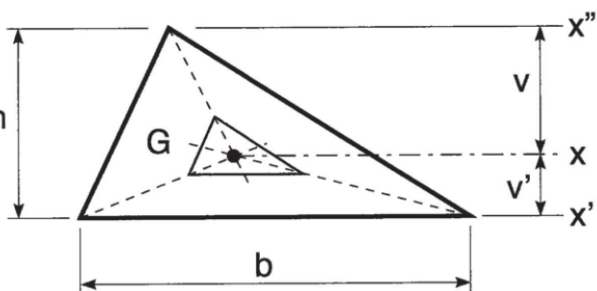
$$I_{x'} = \frac{bh^3}{12} \quad I_{x''} = \frac{bh^3}{4} \quad \Omega' = \frac{bh}{3}$$


Figure 2.6

Le noyau central est limité par un triangle, déduit du contour de la section par une homothétie de centre G et de rapport $\frac{1}{4}$.

2.1.4 Losange

$$I_x = \frac{bh^3}{48} \quad \frac{I_x}{v} = \frac{I_x}{v'} = \frac{bh^2}{24}$$

$$\Omega = \frac{bh}{2} \begin{cases} \Omega' = \frac{8}{9} \Omega \\ \Omega_1 = \frac{30}{31} \Omega \end{cases}$$

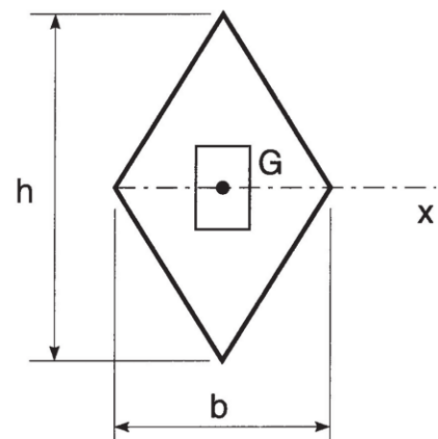


Figure 2.7

Le noyau central est limité par un rectangle ayant pour centre le point G et dont les côtés ont pour longueur $\frac{h}{6}$ et $\frac{b}{6}$.

2.1.5 Trapèze

$$\Omega = \frac{h}{2} (B + b)$$

$$I = \frac{h^3 (B^2 + 4Bb + b^2)}{36 (B + b)}$$

$$v = \frac{h}{3} \left(\frac{2B + b}{B + b} \right)$$

$$v' = \frac{h}{3} \left(\frac{B + 2b}{B + b} \right)$$

$$\Omega' = \frac{h}{3} (B + b)$$

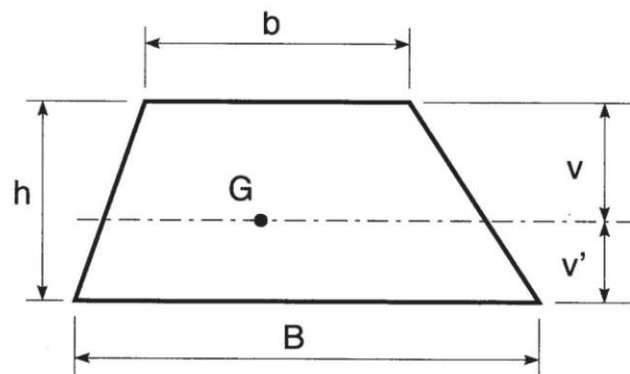


Figure 2.8

2.1.6 Cercle

$$I_x = \frac{\pi R^4}{4} \quad \frac{I_x}{v} = \frac{\pi R^3}{4}$$

$$\text{rayon du noyau central} = \frac{R}{4}$$

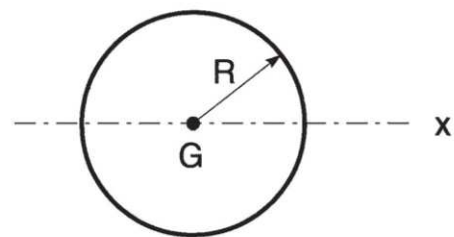


Figure 2.9

Les valeurs de Ω' , Ω_1 et I_p sont données à la suite des tableaux 1 et 2 suivants.

Tableau 2.1 (Section en T) Position du centre de surface : valeurs de $\frac{\nu}{h}$

$\frac{e/h}{b/b'}$	0,04	0,05	0,06	0,08	0,10	0,12	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35
2,00	0,482	0,477	0,473	0,466	0,459	0,453	0,445	0,433	0,425	0,419	0,416
2,20	0,478	0,473	0,468	0,460	0,452	0,445	0,435	0,423	0,413	0,407	0,404
2,40	0,475	0,469	0,464	0,454	0,445	0,437	0,426	0,413	0,403	0,396	0,393
2,60	0,471	0,465	0,459	0,448	0,438	0,429	0,418	0,403	0,393	0,386	0,383
2,80	0,468	0,461	0,454	0,442	0,431	0,422	0,410	0,394	0,384	0,377	0,374
3,00	0,464	0,457	0,450	0,437	0,425	0,415	0,402	0,386	0,375	0,369	0,366
3,20	0,461	0,453	0,445	0,431	0,419	0,408	0,395	0,378	0,367	0,361	0,359
3,40	0,458	0,449	0,441	0,426	0,413	0,402	0,388	0,370	0,359	0,353	0,352
3,60	0,455	0,445	0,437	0,421	0,407	0,395	0,381	0,363	0,352	0,347	0,345
3,80	0,452	0,442	0,432	0,416	0,402	0,389	0,374	0,356	0,346	0,340	0,339
4,00	0,449	0,438	0,428	0,411	0,396	0,384	0,368	0,350	0,339	0,334	0,334
4,20	0,446	0,434	0,424	0,406	0,391	0,378	0,362	0,344	0,333	0,329	0,328
4,40	0,443	0,431	0,420	0,402	0,386	0,373	0,356	0,338	0,328	0,323	0,323
4,60	0,440	0,428	0,417	0,397	0,381	0,367	0,351	0,333	0,322	0,318	0,319
4,80	0,437	0,424	0,413	0,393	0,376	0,362	0,346	0,327	0,317	0,314	0,314

Caractéristiques des sections transversales des pièces prismatiques

5,00	0,434	0,421	0,409	0,388	0,371	0,357	0,341	0,322	0,313	0,309	0,310
5,20	0,431	0,418	0,405	0,384	0,367	0,353	0,336	0,317	0,308	0,305	0,307
5,40	0,428	0,414	0,402	0,380	0,363	0,348	0,331	0,313	0,304	0,301	0,303
5,60	0,425	0,411	0,398	0,376	0,358	0,344	0,326	0,308	0,299	0,297	0,300
5,80	0,423	0,408	0,395	0,372	0,354	0,339	0,322	0,304	0,295	0,293	0,296
6,00	0,420	0,405	0,392	0,369	0,350	0,335	0,318	0,300	0,292	0,290	0,293
6,50	0,413	0,398	0,383	0,359	0,340	0,325	0,308	0,290	0,283	0,282	0,286
7,00	0,407	0,390	0,376	0,351	0,331	0,316	0,299	0,282	0,275	0,275	0,280
7,50	0,401	0,383	0,368	0,343	0,323	0,307	0,290	0,274	0,268	0,269	0,274
8,00	0,395	0,377	0,361	0,335	0,315	0,299	0,282	0,267	0,261	0,263	0,269
8,50	0,389	0,370	0,354	0,328	0,307	0,292	0,275	0,260	0,255	0,258	0,265
9,00	0,384	0,364	0,348	0,320	0,300	0,284	0,268	0,254	0,250	0,253	0,261
9,50	0,378	0,358	0,341	0,314	0,293	0,278	0,262	0,248	0,245	0,249	0,257
10,00	0,373	0,353	0,335	0,307	0,287	0,272	0,256	0,243	0,240	0,245	0,253
10,50	0,368	0,347	0,329	0,301	0,281	0,266	0,250	0,238	0,236	0,241	0,250
11,00	0,363	0,342	0,324	0,296	0,275	0,260	0,245	0,233	0,232	0,238	0,247
11,50	0,358	0,336	0,318	0,290	0,270	0,255	0,240	0,229	0,228	0,234	0,245
12,00	0,353	0,331	0,313	0,285	0,264	0,250	0,235	0,225	0,225	0,231	0,242

Tableau 2.2 (Section en T) Moment quadratique $I_x = \eta \frac{b'b^3}{12}$. Valeurs de η

e/h b/b'	0,04	0,05	0,06	0,08	0,10	0,12	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35
2,00	1,106	1,129	1,150	1,189	1,222	1,251	1,286	1,328	1,353	1,366	1,371
2,20	1,127	1,153	1,178	1,223	1,262	1,295	1,335	1,381	1,408	1,422	1,426
2,40	1,147	1,177	1,206	1,256	1,300	1,337	1,381	1,431	1,459	1,473	1,477
2,60	1,166	1,201	1,233	1,289	1,337	1,377	1,425	1,478	1,507	1,520	1,524
2,80	1,186	1,224	1,259	1,321	1,372	1,416	1,467	1,523	1,552	1,564	1,567
3,00	1,205	1,246	1,284	1,351	1,407	1,453	1,507	1,565	1,594	1,605	1,608
3,20	1,224	1,269	1,310	1,381	1,440	1,489	1,545	1,604	1,633	1,644	1,646
3,40	1,242	1,290	1,334	1,410	1,473	1,524	1,582	1,642	1,670	1,680	1,682
3,60	1,261	1,312	1,358	1,439	1,504	1,557	1,617	1,678	1,705	1,714	1,715
3,80	1,279	1,333	1,382	1,466	1,534	1,590	1,651	1,712	1,739	1,747	1,747
4,00	1,296	1,354	1,405	1,493	1,564	1,620	1,683	1,744	1,770	1,777	1,778
4,20	1,314	1,374	1,428	1,519	1,592	1,650	1,714	1,775	1,800	1,806	1,807
4,40	1,331	1,394	1,450	1,545	1,620	1,679	1,744	1,804	1,828	1,834	1,835
4,60	1,348	1,413	1,472	1,570	1,647	1,707	1,773	1,833	1,856	1,860	1,861
4,80	1,365	1,433	1,493	1,594	1,673	1,734	1,800	1,859	1,881	1,886	1,886

Caractéristiques des sections transversales des pièces prismatiques

5,00	1,382	1,452	1,514	1,610	1,698	1,760	1,826	1,885	1,906	1,910	1,914
5,20	1,398	1,470	1,534	1,641	1,723	1,786	1,852	1,910	1,930	1,933	1,934
5,40	1,414	1,489	1,555	1,663	1,747	1,810	1,877	1,934	1,953	1,955	1,957
5,60	1,430	1,507	1,574	1,685	1,770	1,834	1,900	1,957	1,974	1,977	1,979
5,80	1,446	1,525	1,594	1,707	1,793	1,857	1,924	1,979	1,995	1,997	2,000
6,00	1,461	1,542	1,613	1,728	1,815	1,880	1,946	2,000	2,016	2,017	2,021
6,50	1,499	1,585	1,659	1,779	1,868	1,933	1,998	2,050	2,063	2,064	2,070
7,00	1,536	1,626	1,703	1,827	1,917	1,983	2,047	2,095	2,106	2,107	2,116
7,50	1,571	1,665	1,745	1,872	1,964	2,029	2,092	2,137	2,146	2,147	2,159
8,00	1,605	1,703	1,786	1,915	2,008	2,073	2,134	2,176	2,183	2,185	2,200
8,50	1,639	1,739	1,824	1,956	2,049	2,113	2,173	2,212	2,218	2,220	2,239
9,00	1,671	1,775	1,861	1,995	2,088	2,152	2,209	2,246	2,250	2,254	2,277
9,50	1,702	1,809	1,897	2,032	2,125	2,188	2,243	2,227	2,280	2,285	2,313
10,00	1,732	1,841	1,931	2,068	2,160	2,222	2,276	2,306	2,309	2,316	2,348
10,50	1,762	1,873	1,964	2,101	2,193	2,254	2,306	2,334	2,336	2,345	2,382
11,00	1,791	1,904	1,996	2,134	2,225	2,256	2,334	2,360	2,362	2,373	2,415
11,50	1,818	1,933	2,027	2,165	2,255	2,313	2,361	2,385	2,386	2,399	2,447
12,00	1,859	1,962	2,056	2,194	2,284	2,341	2,387	2,408	2,409	2,425	2,478

$$\Omega = \pi R^2 \begin{cases} \Omega' = \frac{3}{4} \Omega \\ \Omega_1 = \frac{9}{10} \Omega \end{cases}$$

$$I_p = \frac{\pi R^4}{2}$$

2.1.7 Anneau

$$\Omega = \pi (R_e^2 - R_i^2) \quad I_x = \frac{\pi}{4} (R_e^4 - R_i^4)$$

$$\text{rayon du noyau central : } \frac{R_e}{4} \left[1 + \left(\frac{R_i}{R_e} \right)^2 \right]$$

$$\Omega' = \frac{3}{4} \Omega \frac{\left(1 - \frac{R_i}{R_e} \right) \left[1 + \left(\frac{R_i}{R_e} \right)^2 \right]}{1 - \left(\frac{R_i}{R_e} \right)^3}$$

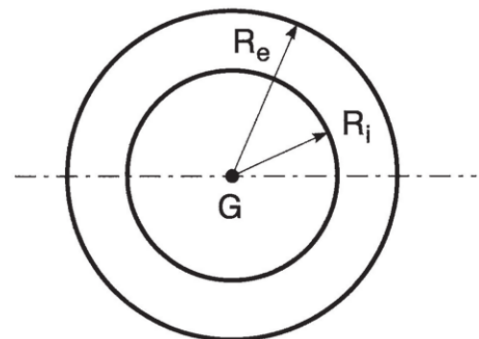


Figure 2.10

2.1.8 Anneau de faible épaisseur

On peut considérer cette condition remplie si $e < \frac{R}{10}$.

$$\Omega = 2\pi R e \quad I_x = \pi R^3 e \quad \frac{I_x}{v} = \pi R^2 e$$

$$\text{rayon du noyau central} = \frac{R}{2}$$

$$\Omega' = \frac{1}{2} \Omega$$

$$\Omega_1 = \frac{1}{2} \Omega \quad I_p = 2\pi R^3 e$$

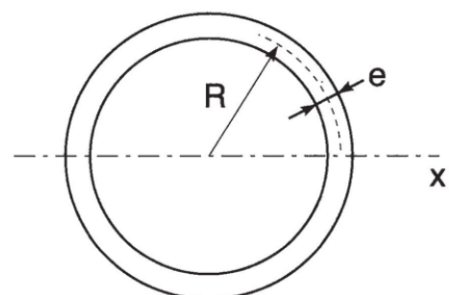


Figure 2.11

2.1.9 Ellipse

$$\Omega = \frac{\pi}{4} bh \quad I_x = \frac{\pi}{64} bh^3$$

Le noyau central est limité par une ellipse ayant pour centre le point G et dont les diamètres ont pour longueur $\frac{b}{4}$ et $\frac{h}{4}$.

$$\Omega' = \frac{3}{4} \Omega$$

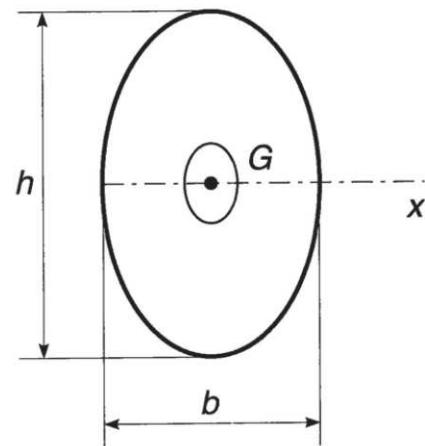


Figure 2.12

2.1.10 Arc de circonférence de faible épaisseur

On peut considérer cette condition réalisée si $e < \frac{R}{10}$.

$$\Omega = 2\alpha Re$$

$$OG = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}$$

$$m_{x'} = 2eR^2 \sin \alpha$$

$$I_{x'} = eR^3 \left(\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{\alpha} \right)$$

$$I_x = eR^3 \left(\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2} - \frac{2 \sin^2 \alpha}{\alpha} \right)$$

$$\Omega' = \frac{I\Omega}{2eR^3 (\alpha \sin \beta - \beta \sin \alpha)} \quad \text{avec} \quad \beta = \arccos \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)$$

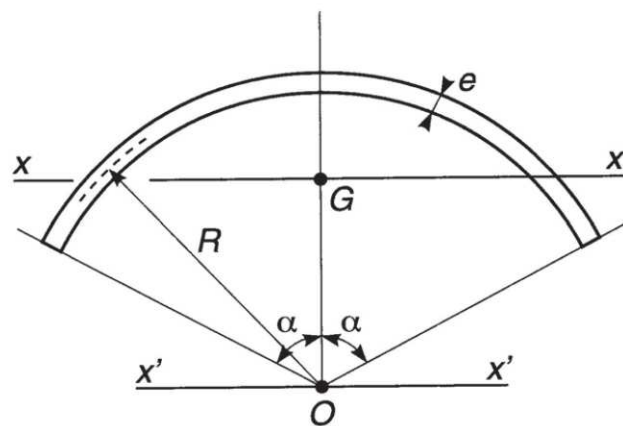


Figure 2.13

2.1.11 Arc de parabole de faible épaisseur

$$\Omega = 2ae$$

$$OG = \frac{2f}{3}$$

$$m_{x'} = \frac{4aef}{3}$$

$$I_{x'} = \frac{48aef^2}{45}$$

$$I_x = \frac{8aef^2}{45}$$

$$\Omega' = \frac{4\sqrt{3}f\Omega \cos \beta}{10a} \quad \text{avec} \quad \beta = \text{Arctan} \left(\frac{2f}{a\sqrt{3}} \right)$$

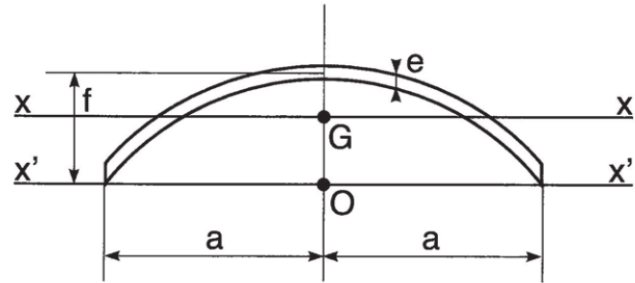


Figure 2.14

2.1.12 Treillis

$$\Omega = \omega_i + \omega_s$$

$$I_x = h^2 \frac{\omega_i \omega_s}{\omega_i + \omega_s}$$

$$\Omega_1 = \frac{E}{G \tan \theta \left(\frac{1}{\omega_d \sin^3 \theta} + \frac{1}{\omega_n} \right)}$$

$$v = h \frac{\omega_s}{\Omega} \quad v' = h \frac{\omega_i}{\Omega}$$

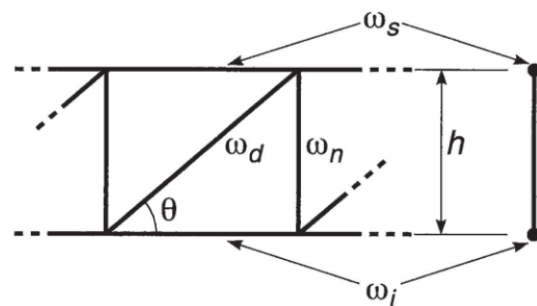


Figure 2.15

2.2 Tables de calcul utilisables dans le cas d'un matériau ne résistant pas à la traction

2.2.1 Section rectangulaire

Désignons par x_1 et y_1 les coordonnées du centre de pression C par rapport à deux axes Gx et Gy passant par le centre de surface de la section entière et respectivement parallèles aux côtés b et h du rectangle.

Les valeurs du rapport de la contrainte maximale à la contrainte moyenne $\frac{N}{bh}$ sont données, en fonction des paramètres $\frac{x_1}{b}$ et $\frac{y_1}{h}$. Les valeurs inférieures à 2 correspondent au cas où le centre de pression est dans le noyau central. Lorsque les coordonnées du centre de pression sont telles que les rapports $\frac{x_1}{b}$ et $\frac{y_1}{h}$ sont simultanément supérieurs à 0,25, la zone comprimée de la section est triangulaire et la contrainte maximale au sommet du triangle a pour valeur :

$$\sigma_{\max} = \frac{3N}{8 \left(\frac{b}{2} - x_1 \right) \left(\frac{h}{2} - y_1 \right)} \quad (2.12)$$

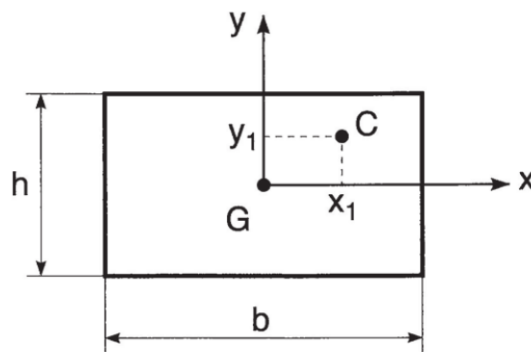


Figure 2.16

Tableau 2.3 Valeurs du rapport des contraintes maximales et moyennes

$$\left(\sigma_{\text{moyen}} = \frac{N}{bh} \right)$$

0,00	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20	0,22	0,24	Valeurs de x_1 / b (ou y_1 / h) Valeurs de y_1 / h (ou x_1 / b)
1,00	1,12	1,24	1,36	1,48	1,60	1,72	1,84	1,96	2,08	2,22	2,38	2,56	0,00
	1,24	1,36	1,48	1,60	1,72	1,84	1,96	2,08	2,21	2,36	2,53	2,72	0,02
		1,48	1,60	1,72	1,84	1,96	2,08	2,21	2,35	2,50	2,68	2,88	0,04
			1,72	1,84	1,96	2,08	2,21	2,34	2,49	2,66	2,84	3,06	0,06
				1,96	2,08	2,21	2,34	2,48	2,64	2,82	3,02	3,25	0,08
					2,20	2,34	2,48	2,63	2,80	2,99	3,20	3,46	0,10
						2,48	2,63	2,80	2,98	3,18	3,41	3,68	0,12
							2,79	2,97	3,17	3,39	3,64	3,92	0,14
								3,17	3,38	3,62	3,88	4,18	0,16
									3,61	3,86	4,15	4,47	0,18
										4,14	4,44	4,79	0,20
											4,77	5,15	0,22
												5,55	0,24

0,26	0,28	0,30	0,32	0,34	0,36	0,38	0,40	0,42	0,44	0,46	0,48	0,50	Valeurs de x_1 / b (ou y_1 / h) Valeurs de y_1 / h (ou x_1 / b)
2,78	3,03	3,33	3,70	4,17	4,76	5,56	6,67	8,33	11,1	16,7	33,3	∞	0,00
2,95	3,22	3,54	3,93	4,42	5,05	5,90	7,08	8,85	11,8	17,7	35,4	∞	0,02
3,13	3,41	3,75	4,17	4,69	5,36	6,26	7,51	9,38	12,5	18,8	37,5	∞	0,04
3,32	3,62	3,98	4,43	4,98	5,69	6,64	7,96	9,96	13,3	19,9	39,8	∞	0,06
3,52	3,84	4,23	4,70	5,28	6,04	7,05	8,46	10,6	14,1	21,1	42,3	∞	0,08
3,74	4,08	4,49	4,99	5,62	6,42	7,49	8,99	11,2	15,0	22,5	44,9	∞	0,10
3,98	4,35	4,78	5,31	5,97	6,83	7,97	9,56	12,0	15,9	23,9	47,8	∞	0,12
4,24	4,63	5,09	5,66	6,37	7,27	8,49	10,2	12,7	17,0	25,5	50,9	∞	0,14
4,53	4,94	5,43	6,04	6,79	7,76	9,06	10,9	13,6	18,1	27,2	54,3	∞	0,16
4,84	5,28	5,81	6,46	7,26	8,30	9,68	11,6	14,5	19,4	29,1	58,1	∞	0,18
5,19	5,66	6,23	6,92	7,78	8,90	10,4	12,5	15,6	20,8	31,1	62,3	∞	0,20
5,57	6,08	6,69	7,43	8,36	9,55	11,2	13,4	16,7	22,3	33,4	66,9	∞	0,22
6,01	6,56	7,21	8,01	9,01	10,3	12,0	14,4	18,0	24,0	36,1	72,1	∞	0,24
6,51	7,10	7,81	8,68	9,77	11,2	13,0	15,6	19,5	26,0	39,1	78,1	∞	0,26
	7,75	8,52	9,47	10,7	12,2	14,2	17,0	21,3	28,4	42,6	85,2	∞	0,28
		9,38	10,4	11,7	13,4	15,6	18,8	23,4	31,3	46,9	93,8	∞	0,30
			11,6	13,0	14,9	17,4	20,8	26,0	34,7	52,1	104	∞	0,32
				14,7	16,7	19,5	23,4	29,3	39,1	58,6	117	∞	0,34
					19,1	22,3	26,8	33,5	44,6	67,0	134	∞	0,36
						26,0	31,3	39,1	52,1	78,1	156	∞	0,38
							37,5	46,9	62,5	93,8	188	∞	0,40
								58,6	78,1	117	234	∞	0,42
									104	156	313	∞	0,44
										234	469	∞	0,46
											938	∞	0,48
												∞	0,50

2.2.2 Section circulaire et section annulaire

Les tableaux ci-après donnent pour divers rapports du diamètre intérieur h' et du diamètre extérieur h :

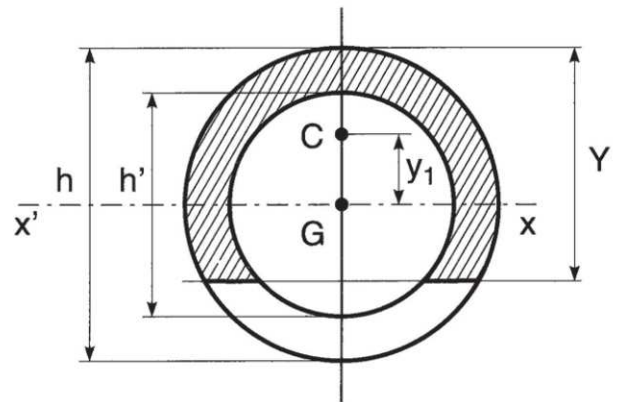


Figure 2.17

- La valeur de $\frac{Y}{h}$ en fonction de l'excentricité relative $\frac{y_1}{h}$;

Tableau 2.4 Valeurs de $\frac{Y}{h}$

y_1/h	h'/h							y_1/h
	0,0	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	
0,150	0,910	–	–	–	–	–	–	0,150
0,175	0,830	0,940	0,990	–	–	–	–	0,175
0,200	0,750	0,875	0,920	0,965	–	–	–	0,200
0,225	0,685	0,805	0,855	0,905	0,950	–	–	0,225
0,250	0,615	0,730	0,780	0,830	0,890	0,945	1,000	0,250
0,275	0,550	0,645	0,695	0,780	0,810	0,870	0,935	0,275
0,300	0,485	0,560	0,605	0,660	0,725	0,790	0,855	0,300
0,325	0,420	0,470	0,510	0,565	0,625	0,700	0,770	0,325
0,350	0,360	0,375	0,410	0,465	0,525	0,600	0,675	0,350
0,375	0,295	0,300	0,320	0,360	0,425	0,495	0,575	0,375
0,400	0,235	0,235	0,240	0,260	0,305	0,385	0,470	0,400
0,425	0,175	0,175	0,175	0,180	0,210	0,275	0,360	0,425
0,450	0,120	0,120	0,120	0,120	0,120	0,160	0,245	0,450
0,475	0,060	0,060	0,060	0,060	0,060	0,060	0,125	0,475

- La valeur du rapport de la contrainte maximale à la contrainte moyenne $\frac{N}{\Omega}$, en fonction de l'excentricité relative.

La première colonne des tables correspond aux sections circulaires pleines ($h' = 0$) et la dernière colonne aux sections annulaires infiniment minces ($\frac{h'}{h} = 1$).

Tableau 2.5 Valeurs du rapport $\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{moyen}}}$

y_1/h	h'/h							y_1/h
	0,0	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	
0,000	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,000
0,025	1,20	1,16	1,15	1,13	1,12	1,11	1,10	0,025
0,050	1,40	1,32	1,29	1,27	1,24	1,22	1,20	0,050
0,075	1,60	1,48	1,44	1,40	1,37	1,33	1,30	0,075
0,100	1,80	1,64	1,59	1,54	1,49	1,44	1,40	0,100
0,125	2,00	1,80	1,73	1,67	1,61	1,55	1,50	0,125
0,150	2,23	1,96	1,88	1,81	1,73	1,66	1,60	0,150
0,175	2,48	2,12	2,04	1,94	1,85	1,77	1,70	0,175
0,200	2,76	2,29	2,20	2,07	1,98	1,88	1,80	0,200
0,225	3,11	2,51	2,39	2,23	2,10	1,99	1,90	0,225
0,250	3,55	2,80	2,61	2,42	2,26	2,10	2,00	0,250
0,275	4,15	3,14	2,89	2,67	2,42	2,26	2,17	0,275
0,300	4,96	3,58	3,24	2,99	2,64	2,42	2,26	0,300
0,325	6,00	4,34	3,80	3,30	2,92	2,64	2,42	0,325
0,350	7,48	5,40	4,65	3,86	3,33	2,95	2,64	0,350
0,375	9,93	7,26	5,97	4,81	3,93	3,33	2,89	0,375
0,400	13,87	10,05	8,80	6,53	4,93	3,96	3,27	0,400
0,425	21,08	15,55	13,32	10,43	7,16	4,50	3,77	0,425
0,450	38,25	30,80	25,80	19,85	14,60	7,13	4,71	0,450
0,475	96,10	72,20	62,20	50,20	34,60	19,80	6,72	0,475
0,500	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0,500

3

Méthodes générales utilisées en résistance des matériaux

3.1 Potentiel interne

Soit un corps élastique en équilibre, soumis à un système de forces (au sens général, soit force et couple), dont l'application est lente et progressive, et tel que les liaisons extérieures soient rigides et sans frottement.

On peut définir le potentiel interne :

- soit à partir du travail des forces extérieures au cours de leur application

$$W_E = \frac{1}{2} \left[\sum F_i \lambda_i + \sum C_j \varphi_j \right] \quad (3.1)$$

λ_i est la projection, sur la direction de la force F_i , du déplacement du point d'application de cette force ; φ_j est la rotation, projetée sur l'axe du couple C_j , de la section d'application de ce couple ;

- soit à partir du travail des forces intérieures, qui peut s'exprimer par

$$W_I = \frac{1}{2} \int_0^s \left(\frac{N^2}{E\Omega} + \frac{M^2}{EI} + \frac{V^2}{G\Omega_1} + \frac{T^2}{GJ} \right) ds \quad (3.2)$$

D'après le **théorème de Clapeyron**, qui est une application du principe de la conservation de l'énergie, il y a égalité entre W_E et W_I ; cette égalité ne dépend ni de l'ordre dans lequel les forces sont appliquées, ni des variations de ces forces entre l'état initial et l'état final du corps.

3.2 Théorème de Castigliano

Dans un système à appuis indéformables, la dérivée partielle du potentiel interne par rapport à une force (ou un couple) extérieure est égale à la projection sur la direction de cette force (ou sur l'axe du couple) du déplacement élastique du point d'application de la force (ou de la rotation élastique de la section où s'applique le couple) :

$$\frac{\partial W}{\partial F_i} = \lambda_i \quad (3.3)$$

Conséquences

Si l'on veut calculer le déplacement λ d'une section Σ d'une poutre dans une direction donnée, on applique une force auxiliaire fictive F dans la section Σ suivant cette direction, et λ sera égal à la valeur de $\frac{\partial W}{\partial F}$ pour $F = 0$.

L'utilisation de cette méthode dite de la charge fictive est également nécessaire lorsque le système est soumis à une charge répartie. Des applications sont proposées au paragraphe 4.14.

Le théorème serait encore applicable aux systèmes à appuis élastiques à condition d'introduire le travail de déformation des appuis dans l'expression de W .

3.3 Théorème de Menabrea

Dans un système hyperstatique sur appuis invariables, les réactions hyperstatiques dues aux liaisons surabondantes ne travaillent pas pendant la déformation du système.

Les réactions R_i doivent donc satisfaire aux équations :

$$\frac{\partial W}{\partial R_i} = 0 \quad (3.4)$$

Les dérivées partielles du potentiel, par rapport aux réactions hyperstatiques, sont nulles.

Un exemple d'application est donné au paragraphe 5.1.4.

3.4 Théorème de réciprocité de Maxwell-Betti

Supposons qu'on applique à un corps élastique un système de n forces (ou couples) F_i , puis un second système de p forces G_j . On considère les déplacements (ou rotations) élastiques entraînés par l'action du premier système agissant seul, puis ceux provoqués par le seul second système.

La somme des travaux des forces et couples du premier système F_i pour les déplacements λ_{ij} dus aux forces et couples du second est égale à la somme des travaux des forces et couples du second système G_j pour les déplacements λ_{ji} dus aux forces et couples du premier.

$$\sum_{i=1}^n F_i \lambda_{ij} = \sum_{j=1}^p G_j \lambda_{ji} \quad (3.5)$$

Conséquence

Le déplacement (ou la rotation) produit en i par une force (ou couple) unitaire agissant en j a la même mesure que le déplacement (ou la rotation) produit en j par la force (ou le couple) unitaire agissant en i .

Un exemple d'application est proposé au paragraphe 4.15.

3.5 Expression analytique des déplacements : formule de Mohr

Cas des systèmes à plan moyen chargés dans leur plan

Soit M_F , N_F et V_F les éléments de réduction produits dans la section S par un système de forces extérieures F , et M_u , N_u et V_u les éléments de réduction produits dans cette même section par une force (ou un couple) unitaire appliquée dans la section i suivant la direction i .

La **formule de Mohr** donne le déplacement (ou la rotation) de la section i , suivant la direction i , sous l'effet du système de forces F :

$$\lambda_{iF} = \int_0^s \frac{M_F M_u}{EI} ds + \int_0^s \frac{N_F N_u}{E\Omega} ds + \int_0^s \frac{V_F V_u}{E\Omega_1} ds \quad (3.6)$$

Si le système est hyperstatique, on démontre que les éléments M_u , N_u et V_u peuvent être calculés dans le système rendu isostatique par la suppression de certaines liaisons, judicieusement choisies.

Cas des pièces droites à âme pleine

Les deux derniers termes peuvent être négligés, et l'on a :

$$\lambda_{iF} = \int_0^l \frac{M_F M_u}{EI} dx \quad (3.7)$$

Si de plus la section est constante :

$$\lambda_{iF} = \frac{1}{EI} \int_0^l M_F M_u dx \quad (3.8)$$

3.6 Principe des travaux virtuels

Le **principe des travaux virtuels** pour un système matériel indéformable exprime que si ce système est en équilibre, pour tout déplacement compatible avec les liaisons, la somme des travaux de toutes les forces agissant sur le système est nulle.

Pour un système élastique, le travail total comprend celui des forces extérieures et celui des forces intérieures au cours de la déformation élastique. Ce dernier est donc égal à la variation de potentiel interne changé de signe.

On en déduit que, si l'on considère seulement le déplacement λ_n correspondant à la force extérieure F_n , on a :

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda_n} = F_n \quad (3.9)$$

La dérivée partielle du potentiel interne par rapport à un déplacement donne la force correspondante.

3.7 Théorème des travaux virtuels

On peut observer, dans la formule de Mohr (3.6) que les expressions :

$$\frac{M_F}{EI} ds, \quad \frac{N_F}{E\Omega} ds \quad \text{et} \quad \frac{V_F}{G\Omega_1} ds$$

sont les déformations produites sur la longueur ds par le système de forces F .

On en déduit que dans tout système en équilibre, le déplacement λ_{iF} d'une section i suivant la direction i , sous l'effet du système de forces F , est égal au travail virtuel que produit, au cours de l'application de ces forces, la force unitaire agissant en i , suivant la direction i .

Équation de Bertrand de Fontviolant

Soit un système, à plan moyen, isostatique ou hyperstatique, soumis dans son plan à des forces et couples donnés et à une variation de température t . Dans une section courante du système, les éléments de réduction des forces et couples appliqués sont M , N , V .

Appelons λ_i les projections des déplacements d'un certain nombre de points A_i de la ligne moyenne, sur des droites Δ_i passant par ces points, et désignons par φ_j les rotations d'un certain nombre de sections S_j .

Supprimons les forces et couples appliqués et la variation de température. Rendons le système isostatique en enlevant les liaisons surabondantes et imaginons qu'on introduise des forces et couples auxiliaires $\mathcal{F}_i$ et $\mathcal{C}_j$ formant un système en équilibre, appliqués respectivement aux points A_i suivant les droites Δ_i , et aux sections S_j . Soit $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ et $\mathcal{V}$ les éléments de réduction dans la section courante du système isostatique dérivé du système donné et soumis aux seules forces et couples auxiliaires $\mathcal{F}_i$ et $\mathcal{C}_j$.

L'**équation de Bertrand de Fontviolant** s'écrit :

$$\sum \mathcal{F}_i \lambda_i + \sum \mathcal{C}_j \varphi_j = \int_0^s \frac{\mathcal{M}M}{EI} ds + \int_0^s \mathcal{N} \left(\frac{N}{E\Omega} - \alpha t \right) ds + \int_0^s \frac{\mathcal{V}V}{G\Omega_1} ds \quad (3.10)$$

Le premier membre de l'équation exprime le travail des forces et couples auxiliaires pour les déplacements subis par leurs points et sections d'application dans le système hyperstatique soumis aux forces extérieures réelles.

Le second membre est le travail des forces élastiques engendrées par les forces et couples auxiliaires dans le système isostatique dérivé, ce travail étant calculé pour les déformations subies par le système hyperstatique sous l'action des forces réelles.

Équation aux liaisons surabondantes

L'**équation aux liaisons surabondantes** est un cas particulier de l'équation (3.10), qui permet de déterminer les forces et couples de liaisons surabondantes sans connaître les déplacements λ_i et les rotations φ_j .

On prend comme système isostatique dérivé le système donné dépouillé de ses liaisons surabondantes et on lui applique des forces $\mathcal{F}_i$ et des couples $\mathcal{C}_j$ auxiliaires d'intensité arbitraire, mais dont les points, directions et sections d'application sont les mêmes que pour les forces et couples de liaisons surabondantes du système hyperstatique.

Le premier membre de l'équation (3.10) est alors nul, et l'équation aux liaisons surabondantes est :

$$\int_0^s \frac{\mathcal{M}\mathcal{M}}{EI} ds + \int_0^s \mathcal{N} \left(\frac{N}{E\Omega} - \alpha t \right) ds + \int_0^s \frac{\mathcal{V}\mathcal{V}}{E\Omega_1} ds = 0 \quad (3.11)$$

$\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{V}$, relatifs au système isostatique se calculent en fonctions linéaires et homogènes des inconnues auxiliaires $\mathcal{F}$ et $\mathcal{C}$.

Dans l'équation (3.11) on regroupera les termes relatifs à chacune des forces $\mathcal{F}_i$ et à chacun des couples $\mathcal{C}_j$. On aura ainsi, dans le cas de n forces et couples de liaisons surabondantes inconnues n coefficients. Comme l'équation (3.11) doit être vérifiée quelle que soit l'intensité des inconnues arbitraires $\mathcal{F}_i$ et $\mathcal{C}_j$, les n coefficients doivent être nuls et on aura ainsi n équations pour déterminer les n forces et couples de liaisons surabondantes.

3.8 Déformation des poutres chargées dans leur plan moyen : formules de Bresse

Soit une poutre G_0G_1 à plan moyen chargée dans son plan et repérée par rapport à un système d'axes Oxy situé dans ce plan.

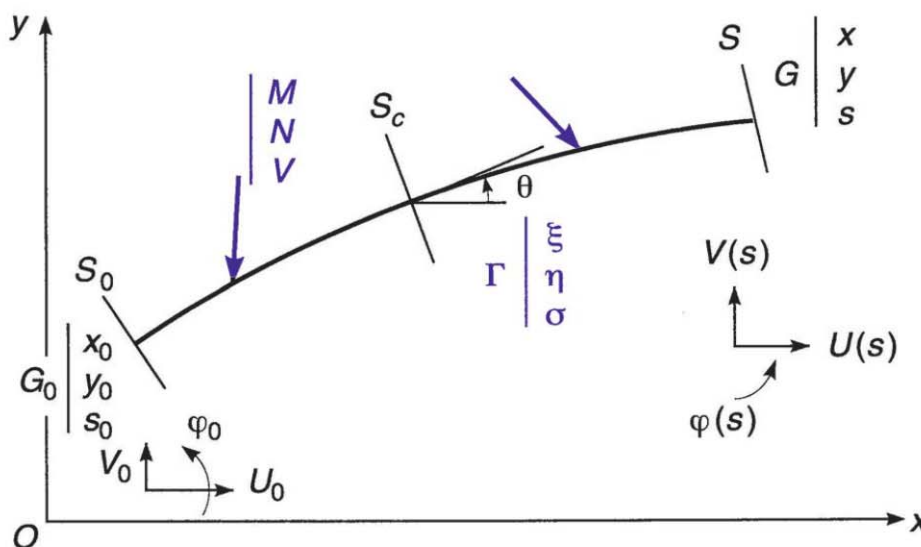


Figure 3.1

- Désignons les coordonnées et l'abscisse curviligne par :
 x_0, y_0, s_0 , pour le centre de gravité G_0 de la section S_0 ;
 x, y, s pour le centre de gravité G de la section S ;
 ξ, η, σ pour le centre de gravité Γ de la section courante S_c située entre S_0 et S .
- Supposons connus :
les composantes u_0, v_0 du déplacement de G_0 et la rotation φ_0 de S_0 ;
les efforts M, N, V dans S_c ;
la variation unitaire de longueur τ subie par la fibre moyenne.

Formules de Bresse

Dans les **formules de Bresse**, les déplacements u, v et la rotation φ de la section G s'expriment en fonction de la déformation de la section origine G_0 et des forces intérieures M, N, V sollicitant la section courante d'abscisse ξ :

$$u(s) = u_0 - \varphi_0 (y - y_0) + \int_{s_0}^s \left[-\frac{M(y - \eta)}{EI} - \frac{N}{ES} \cos \theta + \frac{V}{GS_1} \sin \theta \right] d\sigma + \tau(x - x_0) \quad (3.12)$$

$$v(s) = v_0 + \varphi_0 (x - x_0) + \int_{s_0}^s \left[+\frac{M(x - \xi)}{EI} - \frac{N}{ES} \sin \theta - \frac{V}{GS_1} \cos \theta \right] d\sigma + \tau(y - y_0) \quad (3.13)$$

$$\varphi(s) = \varphi_0 + \int_{s_0}^s \frac{M}{EI} d\sigma \quad (3.14)$$

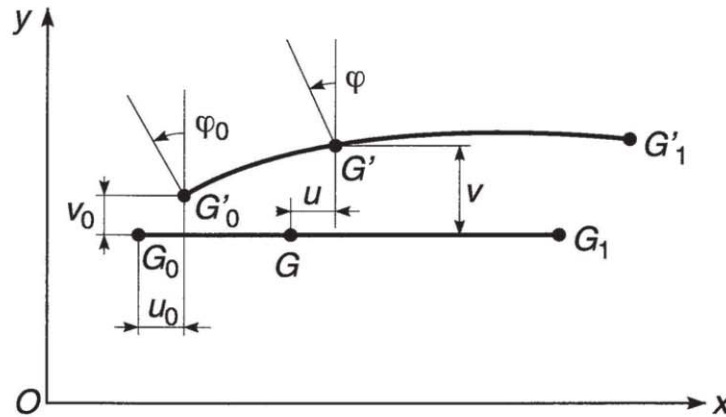
Cas particulier de la poutre droite

Figure 3.2

$$u = u_0 - \int_{x_0}^x \frac{N}{E\Omega} d\xi + \tau(x - x_0) \quad (3.15)$$

$$v = v_0 + \varphi_0(x - x_0) + \int_{x_0}^x \frac{N}{EI} (x - \xi) d\xi - \int_{x_0}^x \frac{V}{G\Omega_1} d\xi \quad (3.16)$$

$$\varphi = \varphi_0 + \int_{x_0}^x \frac{M}{EI} d\xi \quad (3.17)$$

Dans l'application de ces formules, on pourra assez souvent négliger les déformations d'effort tranchant et d'effort normal, qui sont plus faibles que les déformations de flexion.

Les formules de Bresse sont exploitées dans les paragraphes 5.7 et 5.8.

3.9 Lignes d'influence

Définition

Considérons une poutre à plan moyen chargée dans son plan par des forces verticales.

Envisageons, dans une section S d'abscisse x fixe, un effet élastique déterminé, qui peut être :

- M , N ou V dans la section S ;
- le déplacement ou la rotation de la section S ;
- la réaction d'appui si la section S est au droit d'un appui.

Sous l'action d'une charge verticale unité d'abscisse α variable, la valeur de cet effet est une fonction $f(\alpha)$.

Cette fonction est appelée fonction d'influence de l'effet E dans la section S , sous l'action d'une charge verticale unité ; sa ligne représentative est appelée **ligne d'influence** de l'effet E dans la section S .

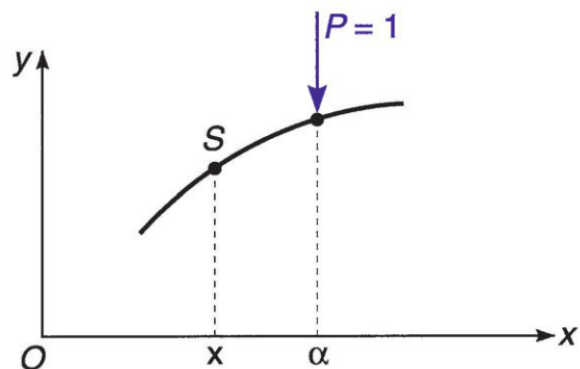


Figure 3.3

3.9.1 Calcul de l'effet d'un système de charges

L'effet E d'un système de charges concentrées $P_1, P_2 \dots P_n$ d'abscisses $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ est égal, en vertu du principe de superposition, à :

$$E = P_1 f(\alpha_1) + P_2 f(\alpha_2) + \dots P_n f(\alpha_n) \quad (3.18)$$

L'effet d'une charge répartie $p(\alpha)$ entre deux points A et B est égal à :

$$E = \int_A^B p(\alpha) f(\alpha) d\alpha \quad (3.19)$$

Si p est constant :

$$E = p \int_A^B f(\alpha) d\alpha \quad (3.20)$$

3.9.2 Calcul des effets extrêmes d'un système de charges variables

Si l'on peut appliquer à une poutre, sur une longueur arbitraire, une surcharge répartie q d'intensité constante, les effets extrêmes dans la section S seront obtenus en surchargeant :

- ▶ ou bien les zones où la fonction d'influence est positive ;
- ▶ ou bien les zones où la fonction d'influence est négative.

Lignes d'influence des déformations

Le théorème de Maxwell-Betti montre que :

- la ligne d'influence du déplacement vertical d'une section d'abscisse x sous l'action d'une charge verticale unité d'abscisse α est la ligne représentative d'un déplacement vertical de la section d'abscisse α sous l'action d'une force verticale unité placée dans la section d'abscisse x ;
- la ligne d'influence de la rotation d'une section d'abscisse x sous l'action d'une charge verticale unité d'abscisse α est la ligne représentative du déplacement vertical de la section d'abscisse α sous l'action d'un couple unité agissant dans la section d'abscisse x .

Un exemple d'application est donné au paragraphe 4.14.

B

Formulaires de poutres, plaques et coques en domaine élastique

4

Systèmes isostatiques

Définition

Un système est **isostatique** lorsque les réactions d'appui et les forces intérieures en n'importe quelle section peuvent être déterminées par les seules conditions d'équilibre ; en d'autres termes, la résolution du système peut être effectuée en utilisant les équations de la statique, sans qu'il soit nécessaire de faire appel aux équations de déformation.

4.1 Exemples

4.1.1 Systèmes encastrés à une extrémité, libres à l'autre : console ou potence

Dans la section courante S (ou dans la section d'encastrement en B), les valeurs de M , N et V peuvent être directement calculées en considérant les forces appliquées entre l'extrémité libre A et la section S (ou entre S et B).

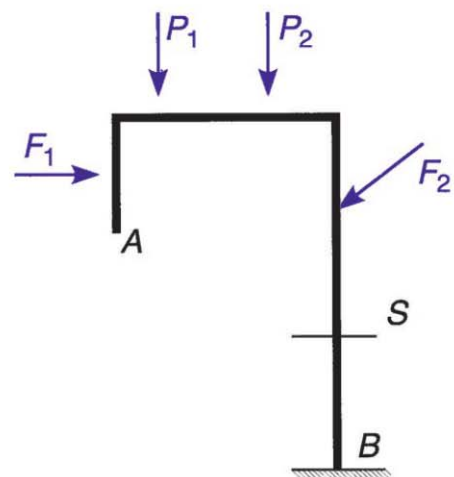


Figure 4.1

4.1.2 Systèmes appuyés aux deux extrémités : poutre sur un appui à rouleau et un appui articulé

La direction de la réaction en A est connue ; son intensité est donnée par l'équation d'équilibre du moment résultant autour de B : somme des moments des forces appliquées par rapport à B + $R_A \ell = 0$.

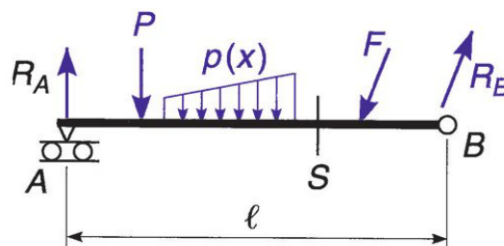


Figure 4.2

Lorsque R_A est déterminé, les valeurs de M , N et V dans une section quelconque S peuvent être calculées en considérant les forces extérieures (comprenant notamment R_A) appliquées entre A et la section S ; de plus, les deux équations algébriques d'équilibre de la résultante sur la poutre entière isolée permettent de calculer les composantes verticale et horizontale de la réaction d'appui R_B qui apparaît parmi les forces extérieures.

Recherche de la valeur maximale du moment de flexion : conformément à l'équation (1.13), la valeur maximale du moment de flexion est obtenue dans la section (S_1) où l'effort tranchant s'annule ; cette section (S_1) peut être déterminée commodément par l'équation : $R_A + \text{somme des projections verticales des forces situées entre A et } S_1 = 0$.

Cas particulier

Poutre ne supportant entre l'appui A et la section S_1 qu'une charge uniformément répartie d'intensité p : A étant pris comme origine, l'abscisse de la section S_1 est :

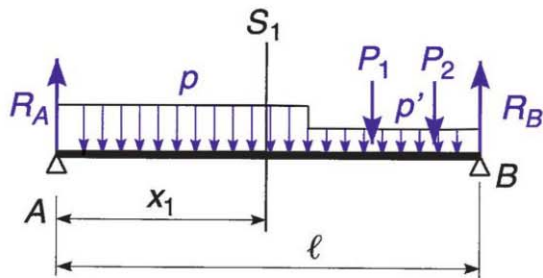


Figure 4.3

$$x_1 = \frac{R_A}{p} \quad (4.1)$$

Le moment maximal dans la poutre est donc :

$$M_{\max} = R_A x_1 - \frac{p x_1^2}{2}$$

$$\text{soit : } M_{\max} = \frac{R_A^2}{2p} \quad (4.2)$$

4.1.3 Grille isostatique de poutres

Les poutres AB, CD, EF, GH sont chargées dans leurs plans moyens, c'est-à-dire perpendiculairement au plan de la figure 4.4. Seuls les points A, C, E, G sont des appuis fixes.

Si l'on néglige la raideur des poutres à la torsion, on a dans le cas général huit inconnues qui sont les réactions d'appui aux points fixes A, C, E, G et les réactions mutuelles des poutres aux nœuds B, D, F, H . Pour chaque poutre, on dispose de deux équations de la statique, l'une exprimant l'équilibre de la résultante dans le sens vertical, l'autre exprimant l'équilibre des moments autour de l'axe horizontal de l'appui fixe perpendiculaire à la poutre étudiée.

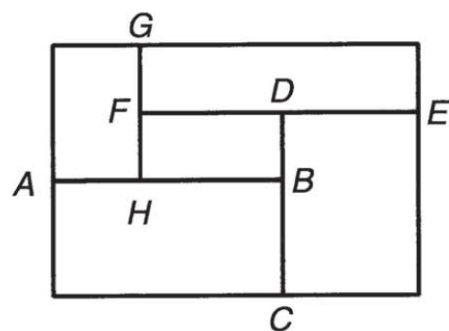


Figure 4.4

On a ainsi autant d'équations de la statique que d'inconnues ; le système est donc isostatique.

Cas particulier d'un système symétrique (panneau carré) et symétriquement chargé

a) On calcule la somme P des charges appliquées sur les quatre poutres ; on a ensuite immédiatement les réactions d'appui :

$$R_A = R_C = R_E = R_G = \frac{P}{4}$$

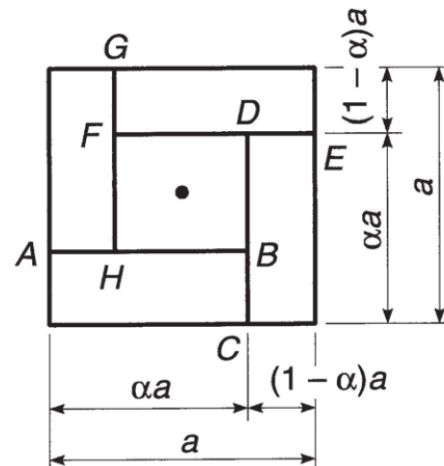


Figure 4.5

b) Le schéma de charge étant connu, la distance d entre la résultante des charges sur la poutre AB et l'appui A est également connue.

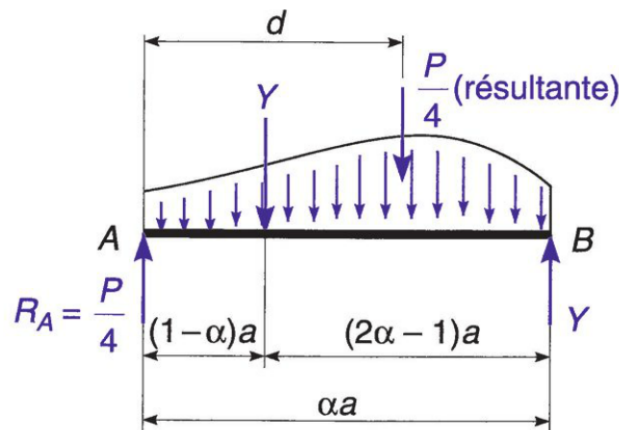


Figure 4.6

Il suffit d'écrire l'équation exprimant l'équilibre des moments autour de A pour trouver la valeur de la réaction mutuelle au point B :

$$Y = \frac{Pd}{4(2\alpha - 1)a}$$

4.2 Effet d'un convoi sur une poutre droite : théorème de Barré

Un convoi est un système de charges concentrées pouvant se déplacer dans leur ensemble, les distances entre les diverses charges restant invariables au cours du déplacement. Les valeurs maximales des efforts tranchants sont obtenues au droit des appuis ; leur recherche ne présente pas de difficulté particulière.

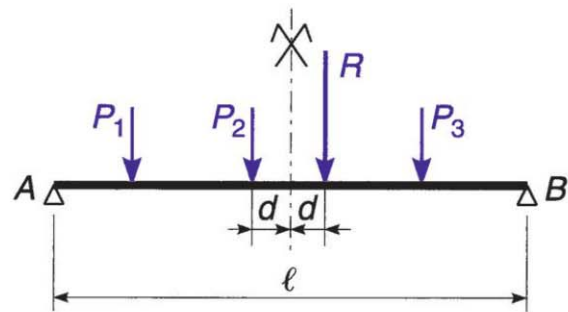


Figure 4.7

Par contre, la recherche de la valeur maximale du moment de flexion au moyen des lignes d'influence ne permet pas de déterminer avec précision la position de la section la plus sollicitée.

La solution du problème est fournie par le **théorème de Barré** : le moment de flexion est maximal au droit d'une charge lorsque cette charge et la résultante générale des charges du convoi se trouvent dans des sections symétriques par rapport au milieu de la poutre (il ne faut évidemment considérer que la résultante des charges du convoi qui se trouvent effectivement sur la poutre).

Application au cas de deux charges égales distantes de a

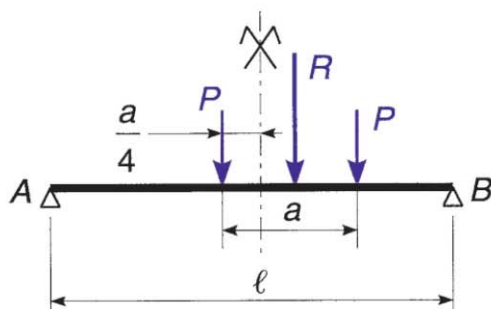


Figure 4.8

On trouve :

$$M_{\max} = \frac{Pl}{2} \left(1 - \frac{a}{2l} \right)^2 \quad (4.3)$$

Si toutefois a est plus grand que $(2 - \sqrt{2})\ell$ (soit $a > 0,586\ell$), le moment maximal est obtenu en disposant une des charges au milieu de la poutre, l'autre se trouvant au-delà de l'appui, on a alors :

$$M_{\max} = \frac{P\ell}{4}$$

4.3 Méthode graphique

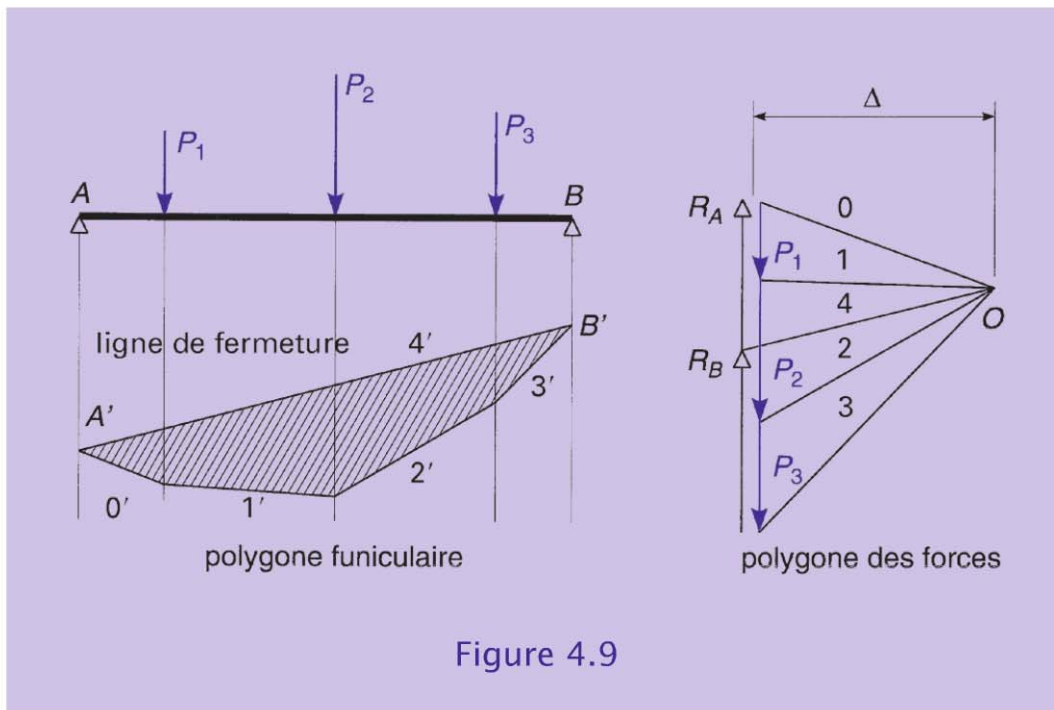
Pour la détermination graphique du diagramme des moments de flexion d'une poutre droite sur deux appuis simples, supportant des charges fixes concentrées ou réparties, agissant normalement à la fibre moyenne de la poutre, on trace le polygone des forces et le polygone funiculaire (voir figure 4.9).

Méthode de construction

Sur le polygone des forces où la somme graphique des forces connues est représentée, on définit à partir d'un pôle O quelconque (en pratique positionné en vis à vis des forces pour une construction exploitable facilement) des *rayons polaires* encadrant chaque force. Ces rayons sont numérotés 0, 1, 2... pour un repérage plus aisé.

Des parallèles aux rayons polaires (repérées 0', 1', 2'...) sont tracées sur le croquis à l'échelle de la poutre pour former le polygone funiculaire de manière à respecter la règle suivante : les deux rayons polaires qui encadrent une force sur le polygone des forces ont leurs parallèles qui se croisent sur le support de cette force (sur le polygone funiculaire).

Si la poutre est en équilibre, les deux polygones sont fermés. On en déduit donc la ligne de fermeture $A'B'$ (noté 4' sur la fig. 4.9). De plus, la parallèle à $A'B'$ menée par le pôle O permet de trouver le rayon polaire fermant le polygone des forces (noté 4 sur la fig. 4.9) et déterminant la proportion des réactions d'appuis R_A et R_B .



Détermination du moment de flexion

Le polygone funiculaire représente le diagramme des moments de flexion. Les ordonnées de ce diagramme, mesurées à l'échelle des longueurs à partir de la ligne de fermeture, et multipliées par la distance polaire Δ , mesurée à l'échelle des forces, donnent les valeurs de M .

La même méthode peut être utilisée une nouvelle fois pour effectuer le tracé de la déformée de la poutre ; suivant le théorème de Mohr, la ligne représentative des moments de flexion produits par la fonction de charge $-\frac{M}{EI}$ est confondue (à l'échelle du tracé près) avec la ligne élastique de la poutre.

4.4 Systèmes en treillis articulé

Ce sont des systèmes constitués de barres droites articulées ; les points d'assemblage des barres sont appelés nœuds. Si les charges sont appliquées aux nœuds, les barres ne subissent que des efforts normaux.

Ces systèmes sont isostatiques si les équations de la statique suffisent à déterminer les réactions d'appui (isostaticité externe) et les efforts dans les barres du treillis (isostaticité interne).

Exemple de système triangulé isostatique (extérieurement et intérieurement).

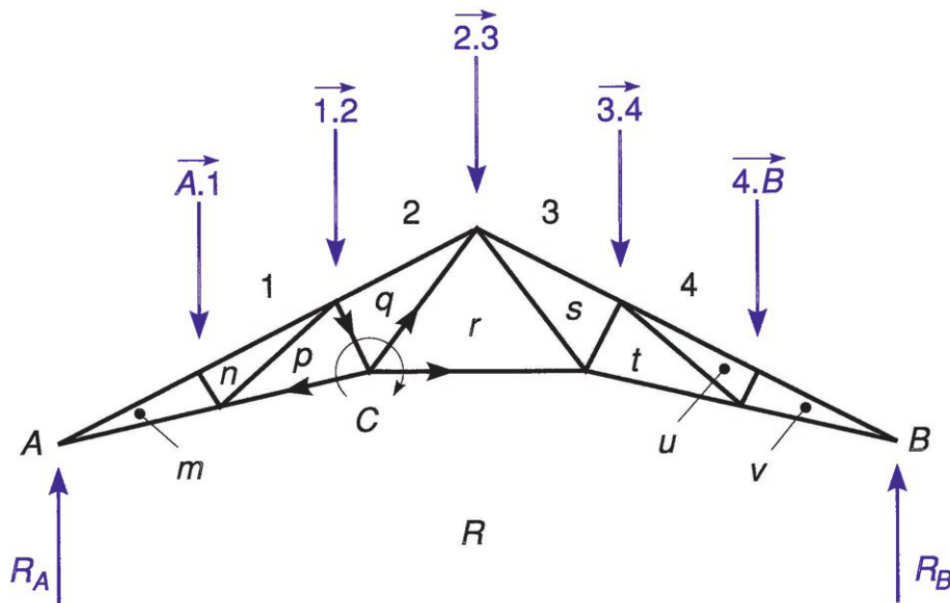


Figure 4.10

4.4.1 Détermination des efforts dans les barres

Nous supposons que les réactions d'appui ont été préalablement calculées ou déterminées graphiquement.

Le tracé de Cremona

Le tracé de Cremona permet de déterminer graphiquement les efforts dans toutes les barres du système.

Exemple : Tracé relatif à la ferme en treillis de la figure 4.10

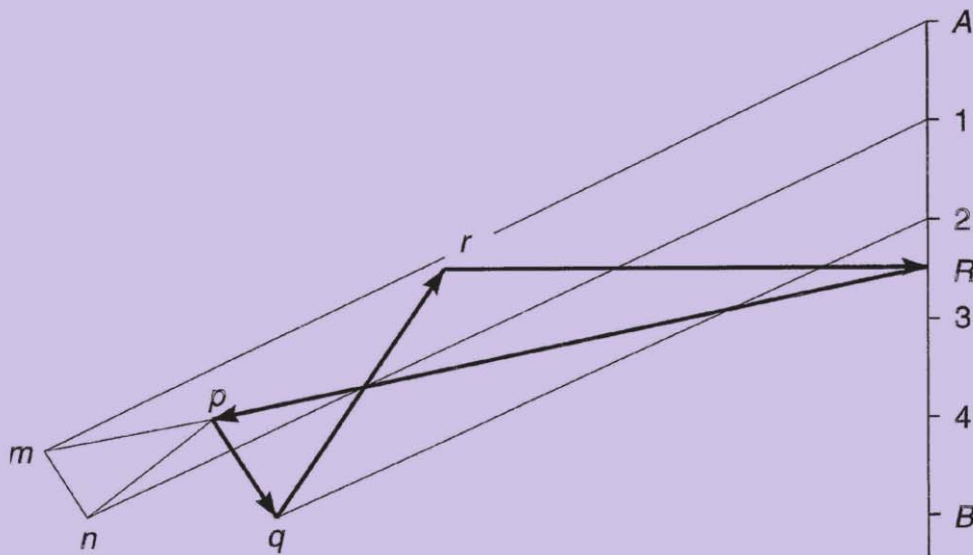


Figure 4.11

Pour effectuer le tracé, on construit d'abord le polygone des forces extérieures et des réactions d'appui, puis en passant d'un nœud à un autre, on construit le polygone des forces, de telle sorte que chaque nœud se trouve en équilibre sous l'action des forces extérieures (éventuelles) et des efforts dans les barres aboutissant à ce nœud.

Il est pratique d'affecter un repère (lettre ou numéro) à chaque zone du plan, délimitée par les barres ou les forces ; ainsi, en adoptant conventionnellement un sens de rotation autour des nœuds, on peut lire directement sur le crémona l'intensité et le sens des forces transmises par les barres aux nœuds. Dans l'exemple traité, si l'on tourne autour du nœud C dans le sens des aiguilles d'une montre, on voit que $\vec{qr}$, $\vec{rR}$ et $\vec{Rp}$ sont des efforts de traction, tandis que $\vec{pq}$ est un effort de compression.

On a la preuve que le tracé est suffisamment précis, lorsque le crémona complet est fermé.

La méthode de Ritter

La méthode de Ritter permet de calculer les efforts dans certaines barres choisies à l'avance.

Cette méthode consiste à pratiquer une coupure ne rencontrant que trois barres et séparant l'ouvrage en deux parties ; pour trouver l'effort dans une de ces barres, on écrit l'équation d'équilibre des moments de l'une des parties, autour du point d'intersection des deux autres barres.

Exemple : Poutre Warren chargée par des forces verticales

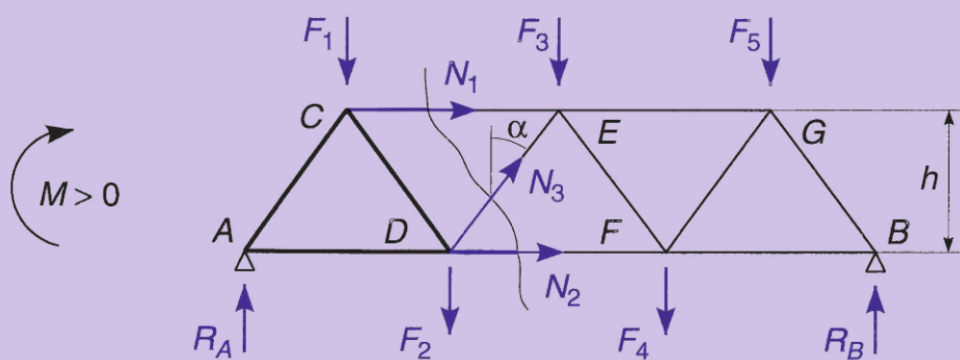


Figure 4.12

Pour le calcul de N_1 , on écrit l'équation d'équilibre des moments autour du point D :

somme des moments de R_A, F_1, F_2 par rapport à D + $N_1 h = 0$.

Pour le calcul de N_2 , on écrit l'équation d'équilibre des moments autour du point E :

somme des moments de R_A, F_1, F_2 par rapport à E - $N_2 h = 0$.

On obtient la valeur de N_3 en projetant les efforts sur l'axe vertical et en écrivant l'équilibre de la résultante en projection sur cet axe :

$$R_A - F_1 - F_2 + N_3 \cos \alpha = 0$$

D'où :

$$N_3 = - \frac{V}{\cos \alpha}$$

4.4.2 Évaluation des déformations

Dans le cas d'un système composé de barres rectilignes de section constante, soumises uniquement à des efforts normaux, la formule de Mohr (3.5) s'écrit :

$$\lambda_{iF} = \frac{1}{E} \sum \frac{N_F N_u}{\Omega} \ell \quad (4.4)$$

cette somme étant étendue à toutes les barres du système.

Rappelons que l'allongement d'une barre est donné à partir de l'effort normal par :

$$\Delta \ell = - \frac{N \ell}{E \Omega} \quad (4.5)$$

4.5 Arc à trois articulations

Soit un arc comportant trois articulations A, B, C ; il s'agit d'un système isostatique car les quatre composantes de réaction X_A, R_A, X_B, R_B peuvent être obtenues par les trois équations de la statique, auxquelles s'ajoute l'équation exprimant que le moment en C est nul.

La distance $AB = l$ est l'ouverture de l'arc ;

La distance $O'C = f$ est la flèche de l'arc.

4.5.1 Action des charges verticales

Les composantes verticales R_A et R_B des réactions d'appui en A et B sont égales aux réactions d'appui de la poutre sur appuis simples, de portée AB , soumise aux mêmes charges verticales que l'arc.

De plus les composantes horizontales X_A et X_B sont égales et opposées :

$$X_A = -X_B = Q \text{ (poussée de l'arc).}$$

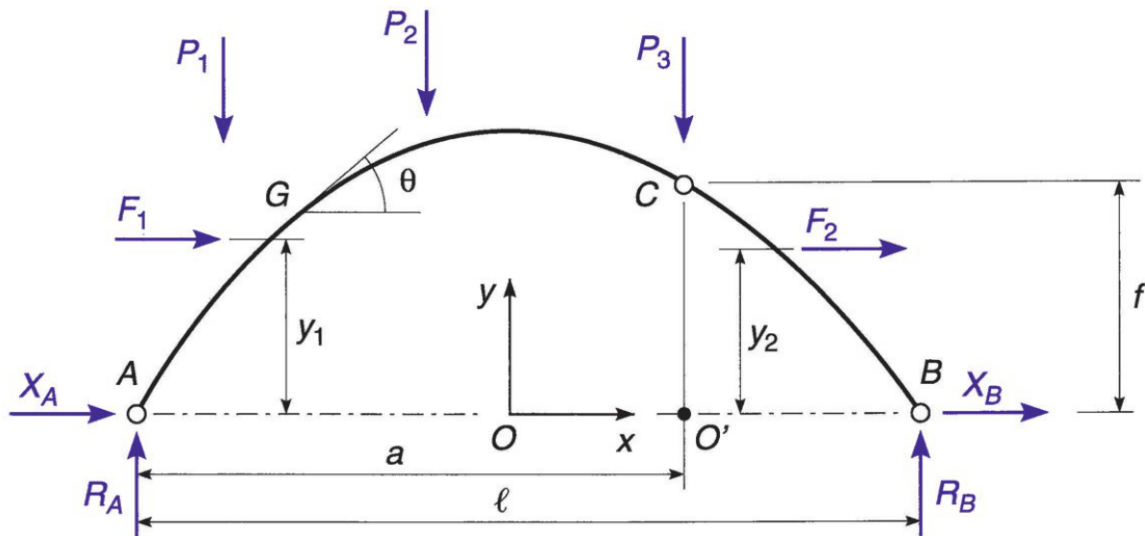


Figure 4.13

Si l'on désigne par μ le moment de flexion dans la poutre sur appuis simples AB soumise aux mêmes charges, le moment de flexion dans l'arc a pour expression :

$$M = \mu - Qy \quad (4.6)$$

Comme M doit être nul à l'articulation C , la poussée est égale à :

$$Q = \frac{\mu_C}{f} \quad (4.7)$$

Au point courant G , on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} N = \frac{d\mu}{dx} \sin \theta + Q \cos \theta \end{array} \right. \quad (4.8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V = \frac{d\mu}{dx} \cos \theta - Q \sin \theta \end{array} \right. \quad (4.9)$$

θ étant l'angle formé par l'horizontale et la tangente à la fibre moyenne en G .

Arc funiculaire d'un système de charges

Si l'ordonnée y d'un point de la fibre moyenne de l'arc est proportionnelle à μ , on a :

$$\begin{cases} M = 0 \\ N = \frac{Q}{\cos \theta} \\ V = 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

Dans ce cas, l'arc est dit funiculaire des charges qui lui sont appliquées. Si certaines charges sont variables, il y a intérêt à choisir comme fibre moyenne de l'arc une courbe située sensiblement à égale distance des courbes funiculaires limites.

4

4.5.2 Action des forces horizontales

On calcule :

$$R_B = -R_A = \frac{1}{\ell} \sum F_i y_i \quad (4.11)$$

puis X_A et X_B tels que le moment en C soit nul et l'équilibre des forces assuré :

$$X_A = R_A \frac{a}{f} - \sum_g F_i \left(1 - \frac{y_i}{f} \right) \quad (4.12)$$

$\sum_g$ concerne les seules forces appliquées à gauche de C :

$$X_B = - \sum F_i - X_A \quad (4.13)$$

Lorsque les composantes des réactions d'appuis sont déterminées, on peut calculer les valeurs de M , N , V en toute section, à partir des forces de gauche (ou de droite).

4.6 Portique à trois articulations

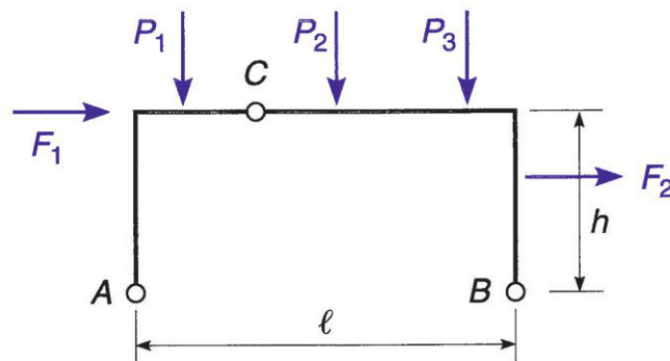


Figure 4.14

Le principe du calcul est rigoureusement le même que pour l'arc à trois articulations.

Cas particulier : portique comportant un montant vertical pendulaire

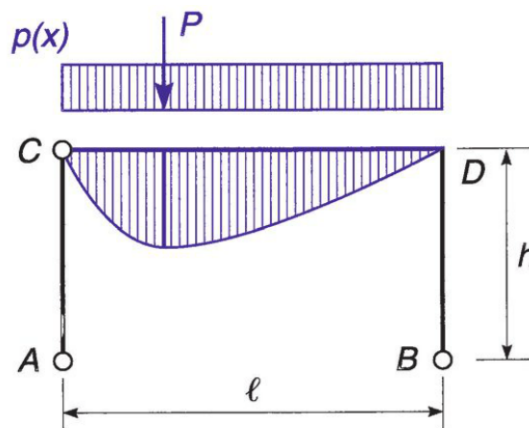


Figure 4.15

Lorsque la troisième articulation C est située au sommet d'un des montants verticaux, la poussée est nulle sous l'action des charges verticales ; le diagramme des moments dans la traverse est le même que pour la poutre sur appuis simples CD , soumise au même système de charges.

La traverse du portique subit un déplacement horizontal égal au produit de la rotation φ_D de la poutre sur appuis simples, par la hauteur h du montant BD . Si certaines liaisons extérieures gênent ou empêchent le déplacement de la traverse, le système devient hyperstatique.

4.7 Formulaire de la console

■ Cas 1 : charge concentrée

$$\begin{aligned}
 R_A &= P & M_A &= -Pa \\
 0 < x < a & V &= P & M &= -P(a - x) \\
 a < x < \ell & V &= 0 & M &= 0
 \end{aligned}$$

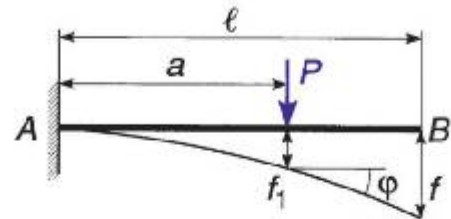


Figure 4.16

Déformée :

$$0 < x < a \quad y' = -\frac{Px}{2EI}(2a - x)$$

$$y = -\frac{Px^2}{6EI}(3a - x)$$

$$a < x < \ell \quad y' = -\frac{Pa^2}{2EI}$$

$$y = -\frac{Pa^2}{6EI}(3x - a)$$

$$f_1 = -\frac{Pa^3}{3EI} \quad f = -\frac{Pa^2}{6EI}(3\ell - a) \quad \varphi = -\frac{Pa^2}{2EI}$$

■ Cas 2 : charge uniformément répartie

$$\begin{aligned}
 R_A &= -p\ell = -P & M_A &= -\frac{p\ell^2}{2} = -\frac{P\ell}{2} \\
 V &= p(\ell - x) & M &= -\frac{p(\ell - x)^2}{2}
 \end{aligned}$$

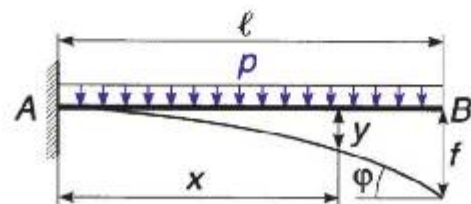


Figure 4.17

Déformée :

$$y' = \frac{P}{6EI} [(\ell - x)^3 - \ell^3]$$

$$y = -\frac{P}{24EI} [(\ell - x)^4 + 4\ell^3 x - \ell^4]$$

$$\varphi = -\frac{P\ell^3}{6EI} \quad f = -\frac{P\ell^4}{8EI}$$

■ Cas 3 : charge triangulaire

$$p_m = \frac{2P}{\ell} \quad R_A = P \quad M_A = -\frac{P\ell}{3}$$

$$V = \frac{P}{\ell^2} (\ell - x)^2 \quad M = -\frac{P(\ell - x)^3}{3\ell^2}$$

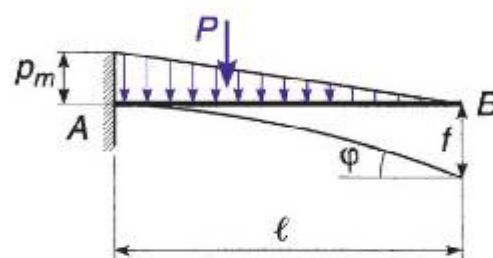


Figure 4.18

Déformée :

$$y' = -\frac{P}{12EI \ell^2} [\ell^4 - (\ell - x)^4]$$

$$y = -\frac{P}{60EI \ell^2} [4\ell^5 - 5\ell^4 (\ell - x) + (\ell - x)^5]$$

$$\varphi = -\frac{P\ell^2}{12EI} \quad f = -\frac{P\ell^3}{15EI}$$

■ Cas 3' : charge triangulaire

$$p_m = \frac{2P}{\ell} \quad R_A = P \quad M_A = -\frac{2P\ell}{3}$$

$$V = P \left(1 - \frac{x^2}{\ell^2} \right) \quad M = -\frac{P(\ell - x)^2 (2\ell + x)}{3\ell^2}$$

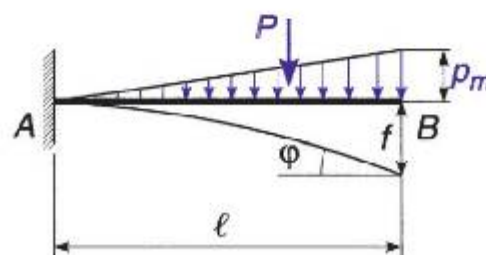


Figure 4.19

Déformée :

$$y' = -\frac{Px}{12EI \ell^2} (8\ell^3 - 6\ell^2 x + x^3)$$

$$y = -\frac{Px^2}{60EI \ell^2} (20\ell^3 - 10\ell^2 x + x^2)$$

$$\varphi = -\frac{P\ell^2}{4EI} \quad f = -\frac{11}{60} \cdot \frac{P\ell^3}{EI}$$

■ Cas 4 : couple

$x < a$	$R_A = 0$	$M_A = C$
	$V = 0$	$M = C$
$x > a$	$V = 0$	$M = 0$

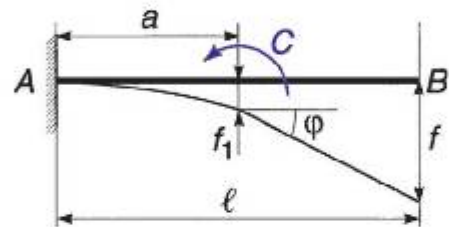


Figure 4.20

Déformée :

$x < a$	$y' = \frac{Cx}{EI}$	$y = \frac{Cx^2}{2EI}$
$x > a$	$y' = \frac{Ca}{EI}$	$y = \frac{Ca}{EI} \left(x - \frac{a}{2} \right)$
$\varphi = \frac{Ca}{EI}$	$f_1 = \frac{Ca^2}{2EI}$	$f = \frac{Ca}{EI} \left(\ell - \frac{a}{2} \right)$

4.8 Formulaire de la poutre sur deux appuis simples

■ Cas 1 : charge concentrée

$$R_A = \frac{Pb}{\ell} \quad R_B = \frac{Pa}{\ell}$$

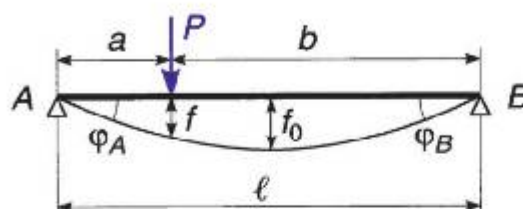


Figure 4.21

$$0 < x < a \quad V = \frac{Pb}{\ell} \quad M = \frac{Pbx}{\ell}$$

$$a < x < \ell \quad V = -\frac{Pa}{\ell} \quad M = Pa \left(1 - \frac{x}{\ell} \right)$$

$$\text{pour } x = a \quad M_{\max} = \frac{Pab}{\ell}$$

Déformée :

$$0 < x < a \quad y' = -\frac{Pb}{6EI\ell} [a(\ell + b) - 3x^2]$$

$$y = -\frac{Pbx}{6EI\ell} (\ell^2 - b^2 - x^2)$$

$$a < x < \ell \quad y' = -\frac{Pa}{6EI\ell} [2\ell^2 - 6\ell x + 3x^2 + a^2]$$

$$y = -\frac{Pa(\ell - x)}{6EI\ell} [x(2\ell - x) - a^2]$$

$$\text{pour } x = a \quad f = -\frac{Pa^2b^2}{3EI\ell}$$

$$\text{pour } x = \frac{\ell}{2} \quad f_0 = -\frac{Pa(3\ell^2 - 4a^2)}{48EI}$$

$$\varphi_A = -\frac{Pa}{6EI\ell} (\ell - a)(2\ell - a) \quad \varphi_B = \frac{Pa}{6EI\ell} (\ell^2 - a^2)$$

Cas particulier :

$$a = b = \frac{\ell}{2}$$

$$R_A = R_B = \frac{P}{2}$$

$$0 < x < \frac{\ell}{2} \quad V = \frac{P}{2}$$

$$M = \frac{P}{2} x$$

$$\frac{\ell}{2} < x < \ell \quad V = -\frac{P}{2}$$

$$M = \frac{P(\ell - x)}{2}$$

$$\text{pour } x = \frac{\ell}{2}$$

$$M_{\max} = \frac{P\ell}{4}$$

Déformée :

$$0 < x < \frac{\ell}{2}$$

$$y' = -\frac{P}{48EI} (3\ell^2 - 12x^2)$$

$$y = -\frac{Px}{48EI} (3\ell^2 - 4x^2)$$

$$\frac{\ell}{2} < x < \ell$$

$$y' = -\frac{P}{16EI} (8\ell x - 3\ell^2 - 4x^2)$$

$$y = -\frac{P(\ell - x)}{48EI} (\ell^2 + 4x^2 - 8\ell x)$$

$$\text{pour } x = \frac{\ell}{2}$$

$$f = -\frac{P\ell^3}{48EI} \quad \varphi_A = -\varphi_B = -\frac{P\ell^2}{16EI}$$

■ Cas 2 : charge uniforme partielle

$$R_A = \frac{pb(b + 2c)}{2\ell}$$

$$R_B = \frac{pb(2a + b)}{2\ell}$$

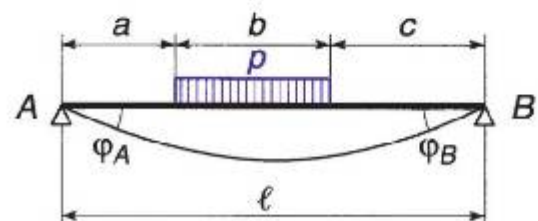


Figure 4.22

$$\begin{aligned}
 0 < x < a \quad V &= \frac{pb}{2\ell}(b+2c) \quad M = \frac{pb}{2\ell}(b+2c)x \\
 a < x < a+b \quad V &= \frac{pb}{2\ell}(b+2c) - p(x-a) \\
 M &= \frac{pb}{2\ell}(b+2c)x - p\frac{(x-a)^2}{2} \\
 a+b < x < \ell \quad V &= -\frac{pb}{2\ell}(2a+b) \quad M = \frac{pb}{2\ell}(2a+b)(\ell-x) \\
 M_{\max} &= \frac{pb}{8\ell^2}(b+2c)[b(b+2c)+4a\ell] \quad \text{pour } x = a + \frac{b(b+2c)}{2\ell}
 \end{aligned}$$

Déformée :

pour $a < x < a+b$

$$\begin{aligned}
 y &= -\frac{p}{48EI\ell}[b(b+2c)x[4(\ell^2-x^2)-(b+2c)^2-b^2]+2\ell(x-a)^4] \\
 \varphi_A &= -\frac{pb(b+2c)}{48EI\ell}[4\ell^2-(b+2c)^2-b^2] \\
 \varphi_B &= \frac{pb(2a+b)}{48EI\ell}[4\ell^2-(2a+b)^2-b^2]
 \end{aligned}$$

■ Cas 3 : charge uniforme partielle près d'un appui

$$\begin{aligned}
 R_A &= \frac{pa}{\ell}\left(\ell - \frac{a}{2}\right) \\
 R_B &= \frac{pa^2}{2\ell}
 \end{aligned}$$

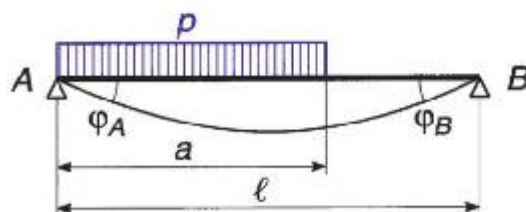


Figure 4.23

$$\begin{aligned}
 0 < x < a \quad V &= \frac{p}{2\ell} [a(2\ell - a) - 2\ell x] \\
 M &= \frac{px}{2\ell} [a(2\ell - a) - \ell x] \\
 M_{\max} &= \frac{pa^2(2\ell - a)^2}{8\ell^2} \quad \text{pour } x = \frac{a}{2\ell}(2\ell - a) \\
 a < x < \ell \quad V &= -\frac{pa^2}{2\ell} \quad M = \frac{pa^2(\ell - x)}{2\ell}
 \end{aligned}$$

Déformée :

$$\begin{aligned}
 0 < x < a \quad y &= -\frac{px}{24EI\ell} [a^2(2\ell - a)^2 - 2a(2\ell - a)x^2 + \ell x^3] \\
 a < x < \ell \quad y &= -\frac{pa^2(\ell - x)}{24EI\ell} (4\ell x - 2x^2 - a^2)
 \end{aligned}$$

$$\varphi_A = -\frac{pa^2(2\ell - a)^2}{24EI\ell} \quad \varphi_B = \frac{pa^2(2\ell^2 - a^2)}{24EI\ell}$$

■ Cas 4 : charge uniformément répartie

$$\begin{aligned}
 R_A = R_B &= \frac{p\ell}{2} = \frac{P}{2} \\
 V &= p\left(\frac{\ell}{2} - x\right) \\
 M &= \frac{px(\ell - x)}{2} \\
 M_{\max} &= \frac{p\ell^2}{8} = \frac{P\ell}{8} \quad \text{pour } x = \frac{\ell}{2}
 \end{aligned}$$

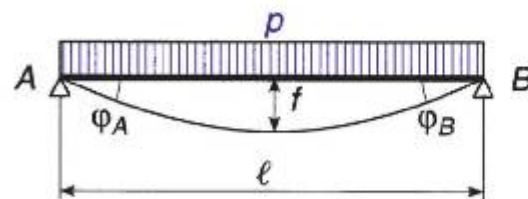


Figure 4.24

Déformée :

$$y' = -\frac{p}{24EI}(\ell^3 - 6\ell x^2 + 4x^3)$$

$$y = -\frac{px}{24EI}(\ell^3 - 2\ell x^2 + x^3)$$

$$f = -\frac{5}{384} \cdot \frac{p\ell^4}{EI} = \frac{M_{\max}\ell^2}{9,6EI}$$

$$\varphi_A = -\varphi_B = -\frac{p\ell^3}{24EI}$$

■ Cas 5 : charge triangulaire

On suppose $a < b$

$$R_A = \frac{p}{6}(\ell + b) \quad R_B = \frac{p}{6}(\ell + a)$$

$$0 < x < a \quad V = \frac{p}{6a}[a(\ell + b) - 3x^2]$$

$$M = \frac{px}{6a}[a(\ell + b) - 3x^2]$$

$$a < x < \ell \quad V = \frac{p}{6b}(3x^2 - 6\ell x + 2\ell^2 + a^2)$$

$$M = \frac{p}{6b}(\ell - x)(2\ell x - x^2 - a^2)$$

$$M_{\max} = \frac{p}{9}(\ell + a)\sqrt{\frac{b(\ell + a)}{3}} \quad \text{pour } x = \ell - \sqrt{\frac{b(\ell + a)}{3}}$$

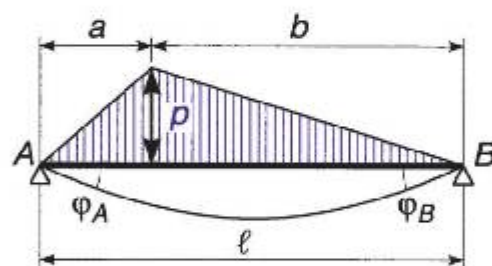


Figure 4.25

Déformée :

$$0 < x < a \quad y = -\frac{px}{360EIa} [3x^4 + a(\ell + b)(7\ell^2 - 3b^2 - 10x^2)]$$

$$a < x < \ell \quad y = -\frac{p(\ell - x)}{360EIb} [3(\ell - x)^4 + b(\ell + a)(7\ell^2 - 3a^2 - 10(\ell - x)^2)]$$

$$\varphi_A = -\frac{p}{360EI} (\ell + b)(7\ell^2 - 3b^2) \quad \varphi_B = \frac{p}{360EI} (\ell + a)(7\ell^2 - 3a^2)$$

■ Cas 6 : charge triangulaire symétrique

$$R_A = R_B = \frac{P}{2}$$

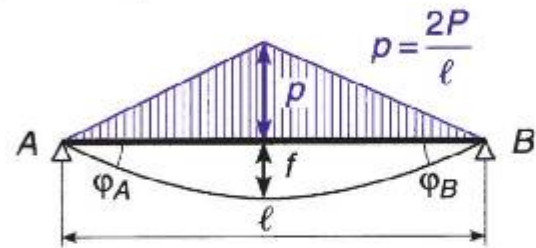


Figure 4.26

$$0 < x < \frac{\ell}{2} \quad V = \frac{P}{2} \left(1 - 4 \frac{x^2}{\ell^2} \right)$$

$$M = \frac{Px}{2} \left(1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{x^2}{\ell^2} \right)$$

$$\frac{\ell}{2} < x < \ell \quad V = -\frac{P}{2} \left[1 - \frac{4(\ell - x)^2}{\ell^2} \right]$$

$$M = \frac{P(\ell - x)}{2} \left[1 - \frac{4(\ell - x)^2}{3\ell^2} \right]$$

$$\text{pour } x = \frac{\ell}{2}$$

$$M_{\max} = \frac{Pl^2}{6}$$

Déformée :

$$y' = -\frac{P}{96EI\ell^2} (16x^4 - 24\ell^2x^2 + 5\ell^4)$$

$$y = -\frac{P}{480EI\ell^2} (16x^4 - 40\ell^2x^2 + 25\ell^4)$$

$$f = -\frac{P\ell^3}{60EI} \quad \text{pour } x = \frac{\ell}{2}$$

$$\varphi_A = \varphi_B = -\frac{5P\ell^2}{96EI}$$

■ Cas 7 : charge triangulaire linéaire

$$P = \frac{p\ell}{2}$$

$$R_A = \frac{P}{3} = \frac{p\ell}{6} \quad R_B = \frac{2P}{3} = \frac{p\ell}{3}$$

$$V = \frac{P}{3\ell^2}(\ell^2 - 3x^2)$$

$$M = \frac{Px}{3\ell^2}(\ell^2 - x^2)$$

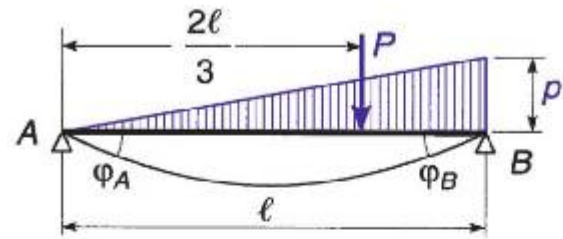


Figure 4.27

$$M = \frac{P\ell}{8} \quad \text{pour } x = \frac{\ell}{2} \quad M_{\max} = \frac{2P\ell}{9\sqrt{3}} \quad \text{pour } x = \frac{\ell}{\sqrt{3}}$$

Déformée :

$$y' = -\frac{P}{180EI\ell^2}(7\ell^4 - 30\ell^2x^2 + 15x^4)$$

$$y = -\frac{Px}{180EI\ell^2}(\ell^2 - x^2)(7\ell^2 - 3x^2)$$

$$f_{\max} = -\frac{P\ell^3}{76,6EI} \quad \text{pour } x = 0,519\ell$$

$$\varphi_A = -\frac{7p\ell^3}{360EI} \quad \varphi_B = +\frac{8p\ell^3}{360EI}$$

■ Cas 8 : charges triangulaires symétriques opposées

$$R_A = -R_B = \frac{p\ell}{6}$$

$$V = \frac{p}{6\ell}(6x^2 - 6\ell x + \ell^2)$$

$$M = \frac{px}{6\ell}(\ell - x)(\ell - 2x)$$

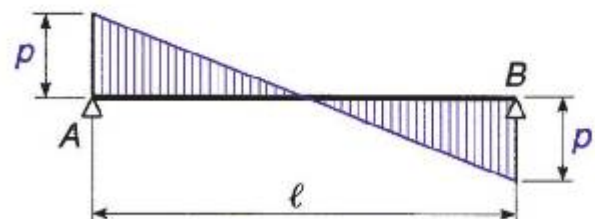


Figure 4.28

$$M_{\max} = \pm \frac{p\ell^2\sqrt{3}}{108} \quad \text{pour } x = \frac{3 \mp \sqrt{3}}{6}\ell$$

Déformée :

$$y' = \frac{p}{360EI\ell} (30x^4 - 60\ell x^3 + 30\ell^2 x^2 - \ell^4)$$

$$y = \frac{px}{360EI\ell} (6x^4 - 15\ell x^3 + 10\ell^2 x^2 - \ell^4)$$

$$\varphi_A = \varphi_B = -\frac{p\ell^3}{360EI}$$

■ Cas 9 : charge trapézoïdale symétrique

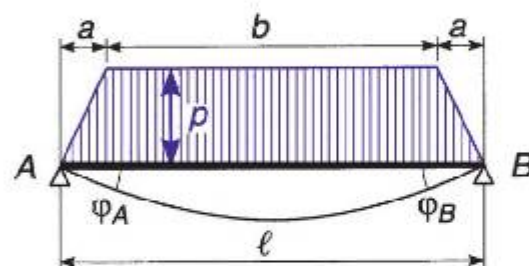


Figure 4.29

$$R_A = R_B = \frac{p}{2} (\ell - a)$$

$$0 < x < a$$

$$V = \frac{p}{2a} (a\ell - a^2 - x^2)$$

$$M = \frac{px}{6a} (3a\ell - 3a^2 - x^2)$$

$$a < x < \ell - a$$

$$V = \frac{p}{2} (\ell - 2x)$$

$$M = \frac{p}{6} (3\ell x - 3x^2 - a^2)$$

$$\ell - a < x < \ell$$

$$V = \frac{p}{2a} [(\ell - x)^2 - a(\ell - a)]$$

$$M = \frac{p}{6a} (\ell - x) [3a(\ell - a) - (\ell - x)^2]$$

$$M_{\max} = \frac{p}{24} (3\ell^2 - 4a^2) \quad \text{pour } x = \frac{\ell}{2}$$

Déformée :

$$f = -\frac{p}{1920EI}(5\ell^2 - 4a^2)^2 \quad \text{pour } x = \frac{\ell}{2}$$

$$\varphi_A = -\varphi_B = -\frac{p}{24EI}(\ell^3 - 2a^2\ell + a^3)$$

■ Cas 10 : charge parabolique

$$R_A = R_B = \frac{p\ell}{3}$$

$$V = \frac{p}{3\ell^2}(4x^3 - 6\ell x^2 + \ell^3)$$

$$M = \frac{p}{3\ell^2}x(x^3 - 2\ell x^2 + \ell^3)$$

$$M_{\max} = \frac{5p\ell^2}{48} \quad \text{pour } x = \frac{\ell}{2}$$

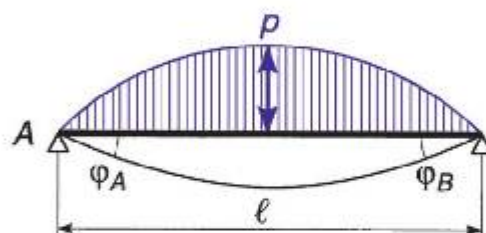


Figure 4.30

Déformée :

$$y' = \frac{p}{30EI\ell^2}[2x^5 - 5\ell x^4 + 5\ell^3 x^2 - \ell^5]$$

$$y = \frac{px}{90EI\ell^2}[x^5 - 3\ell x^4 + 5\ell^3 x^2 - 3\ell^5]$$

$$f = -\frac{6,1p\ell^4}{576EI} \quad \text{pour } x = \frac{\ell}{2}$$

$$\varphi_A = -\varphi_B = -\frac{p\ell^3}{30EI}$$

■ Cas 11 : couple en un point quelconque

$$R_A = \frac{C}{\ell} \quad R_B = -\frac{C}{\ell}$$

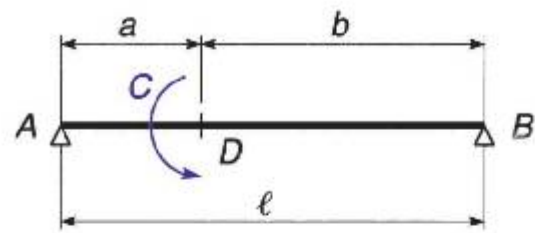


Figure 4.31

$$\begin{aligned} 0 < x < a \quad V &= \frac{C}{\ell} \quad M = \frac{Cx}{\ell} \\ a < x < \ell \quad V &= \frac{C}{\ell} \quad M = -\frac{C(\ell - x)}{\ell} \end{aligned}$$

Déformée :

$$\begin{aligned} 0 < x < a \quad y' &= \frac{C}{6EI\ell} (3x^2 - \ell^2 + 3b^2) \\ y &= \frac{Cx}{6EI\ell} (x^2 - \ell^2 + 3b^2) \\ a < x < \ell \quad y' &= \frac{C}{6EI\ell} (3x^2 - 6\ell x + 2\ell^2 + 3a^2) \\ y &= \frac{C}{6EI\ell} [x^3 - 3\ell x^2 + (2\ell^2 + 3a^2)x - 3a^2\ell] \end{aligned}$$

Flèche en D
$$y_D = \frac{1}{EI} \cdot \frac{Cab(b-a)}{3\ell}$$

$$\varphi_A = -\frac{C}{6EI\ell} (\ell^2 - 3b^2) \quad \varphi_B = -\frac{C}{6EI\ell} (\ell^2 - 3a^2) \quad \varphi_D = \frac{C(a^3 + b^3)}{3EI(a+b)^2}$$

Si $a = b$ $y_D = 0$ $\varphi_A = +\varphi_B = -\frac{C\ell}{24EI}$ $\varphi_D = \frac{C\ell}{12EI}$

■ Cas 12 : couple à l'extrémité de gauche

$$R_A = \frac{C}{\ell} \quad R_B = -\frac{C}{\ell}$$

$$V = \frac{C}{\ell} \quad M = -C \frac{\ell - x}{\ell}$$

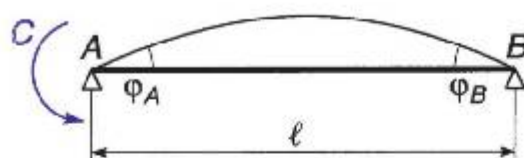


Figure 4.32

Déformée :

$$y' = \frac{C}{6EI\ell} (3x^2 - 6\ell x + 2\ell^2) \quad y = \frac{Cx}{6EI\ell} (\ell - x)(2\ell - x)$$

$$f = \frac{C\ell^2}{16EI} \quad \text{pour } x = \frac{\ell}{2} \quad \varphi_A = \frac{C\ell}{3EI} \quad \varphi_B = -\frac{C\ell}{6EI}$$

■ Cas 13 : couple uniformément réparti

$$R_A = -R_B = c\ell$$

quel que soit x ,

$$V = c \quad M = 0$$

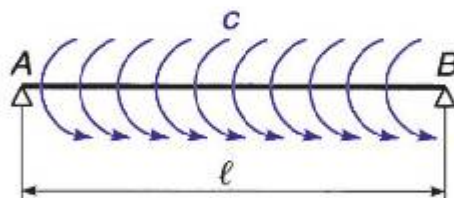


Figure 4.33

Déformée :

$$\text{quel que soit } x, \quad y' = 0 \quad y = 0$$

■ Cas 14 : Action d'un câble tendu

F représente l'effort de traction supposé constant, $e(x)$ le point de passage du câble dans la section d'abscisse x .

On pose $\alpha = \frac{de}{dx}$

$$N = \frac{F}{\sqrt{1 + \alpha^2}}$$

$$M = \frac{Fe(x)}{\sqrt{1 + \alpha^2}}$$

$$V = \frac{F\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}}$$

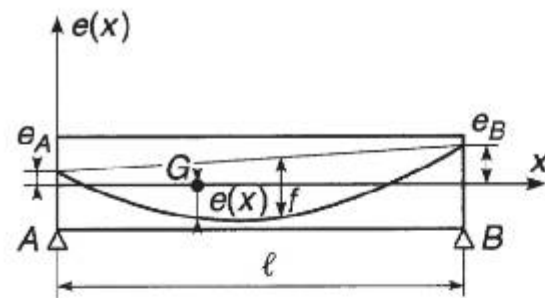


Figure 4.34

Cas particulier du câble parabolique :

$$e(x) = e_A + (e_B - e_A) \frac{x}{\ell} - \frac{4f}{\ell^2} x(\ell - x)$$

$$\alpha = \frac{de}{dx} = \frac{8fx}{\ell^2} + \frac{e_B - e_A}{\ell} - \frac{4f}{\ell}$$

4.9 Formulaire de la poutre sur deux appuis de niveaux différents

■ Cas 1 : charge uniformément répartie avec l'appui B à plan de glissement horizontal

$$R_A = R_B = \frac{p\ell}{2}$$

$$V = p\left(\frac{\ell}{2} - x\right) \cos \alpha$$

$$N = p\left(\frac{\ell}{2} - x\right) \sin \alpha$$

$$M = \frac{px}{2}(\ell - x)$$

$$M_{\max} = \frac{p\ell^2}{8} \text{ pour } x = \frac{\ell}{2}$$

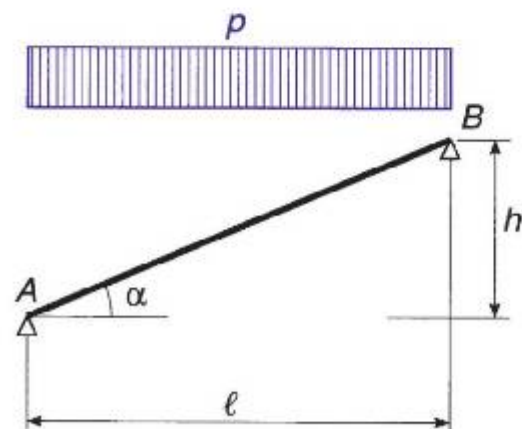


Figure 4.35

Déformée :

$$y' = -\frac{p}{24EI \cos^2 \alpha} (\ell^3 - 6\ell x^2 + 4x^3)$$

$$y = -\frac{px}{24EI \cos^2 \alpha} (\ell^3 - 2\ell x^2 + x^3)$$

$$f = -\frac{5p\ell^4}{384EI \cos^2 \alpha} \quad \text{pour } x = \frac{\ell}{2}$$

$$\varphi_A = -\varphi_B = -\frac{p\ell^3}{24EI \cos^2 \alpha}$$

■ **Cas 2 : charge uniformément répartie avec l'appui B à plan de glissement vertical**

$$R_A = p\ell$$

$$R_B = 0$$

$$H = \frac{p\ell}{2 \tan \alpha}$$

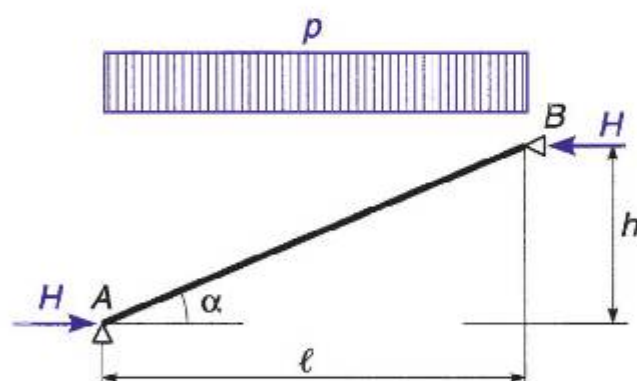


Figure 4.36

$$V = \frac{p}{2}(\ell - 2x) \cos \alpha$$

$$N = \frac{p}{2hl}(\ell^3 + 2\ell h^2 - 2xh^2) \cos \alpha$$

$$M = \frac{p}{2}x(\ell - x)$$

$$M_{\max} = \frac{p\ell^2}{8} \quad \text{pour } x = \frac{\ell}{2}$$

Déformée : les expressions de y' et y sont les mêmes que dans l'exemple précédent.

■ **Cas 3 : charge uniformément répartie sur « poutre-accordéon »**

$$R_A = R_B = \frac{p\ell}{2}$$

partie horizontale :

$$V = p\left(\frac{\ell}{2} - x\right) \quad N = 0$$

$$M = \frac{px}{2}(\ell - x)$$

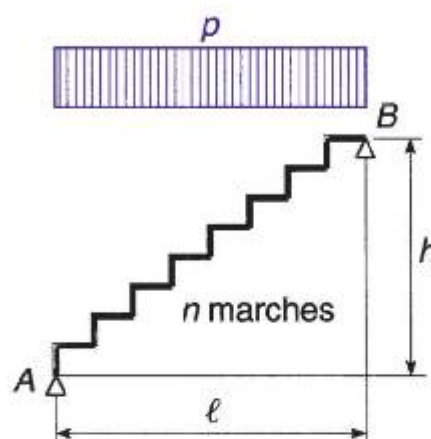


Figure 4.37

partie verticale :

$$V = 0 \quad N = p\left(\frac{\ell}{2} - x\right)$$

$$M = \frac{px}{2}(\ell - x)$$

$$M_{\max} = \frac{p\ell^2}{8} \quad \text{pour } x = \frac{\ell}{2}$$

Déformée :

si n pair

$$f = \frac{5p\ell^4}{384EI} \left[1 + \frac{h}{\ell} \left(1 + \frac{4}{5n^2} \right) \right]$$

si n impair

$$f = \frac{5p\ell^4}{384EI} \left[1 + \frac{h}{\ell} \cdot \frac{(n^2 - 1)}{n^2} \left(1 + \frac{3}{5n^2} \right) \right]$$

4.10 Formulaire de la poutre avec un ou deux appuis rotulés

- **Cas 1 :** Pour les cas de charges données dans le formulaire de la poutre sur deux appuis simples, on trouve les mêmes expressions.
- **Cas 2 :** Un appui rotulé et une charge axiale

$$R_A = P \quad R_B = 0$$

$$x < a:$$

$$N = -P \quad M = 0 \quad V = 0$$

$$x > a:$$

$$N = 0 \quad M = 0 \quad V = 0$$

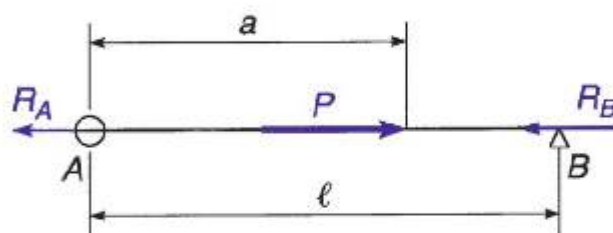


Figure 4.38

- **Cas 3 :** Deux appuis rotulés et une charge axiale

$$R_A = \frac{P(\ell - a)}{\ell} \quad R_B = \frac{Pa}{\ell}$$

$$x < a:$$

$$N = -\frac{P(\ell - a)}{\ell} \quad M = 0 \quad V = 0$$

$$x > a:$$

$$N = \frac{Pa}{\ell} \quad M = 0 \quad V = 0$$

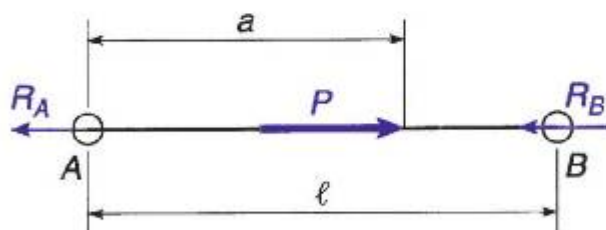


Figure 4.39

4.11 Formulaire de la poutre d'axe vertical

Les appuis bas et haut sont rotulés. Un couple m_0 réparti par unité d'angle est appliqué à un niveau x ; son axe est repéré par l'angle ξ tel que :

$$\xi = \alpha \left(\frac{2x}{\ell} - 1 \right)$$

$$R_{Az} = -R_{Bz} = \frac{2m_0 \sin \alpha}{\ell}$$

$$R_{Ay} = R_{By} = 0$$

À un niveau x caractérisé par :

$$\gamma = \alpha \left(\frac{2x}{\ell} - 1 \right)$$

$$V_y = 0 \quad V_z = \frac{2m_0 \sin \alpha}{\ell}$$

$$M_y = \frac{m_0}{\alpha} (\alpha \sin \gamma - \gamma \sin \alpha)$$

$$M_z = m_0 (\cos \alpha - \cos \gamma)$$

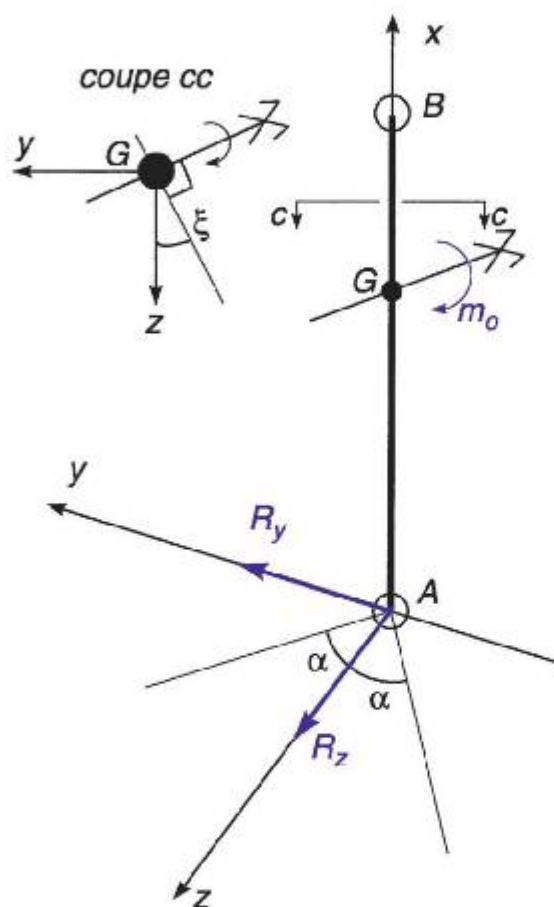


Figure 4.40

Les moments M_y et M_z ont respectivement pour axes Gy et Gz .

4.12 Formulaire de l'arc parabolique isostatique

Arc parabolique isostatique

La fibre moyenne est caractérisée par :

$$y = \frac{4f}{\ell} x(\ell - x)$$

et $\theta = \frac{4f}{\ell} \left(1 - \frac{2x}{\ell}\right)$

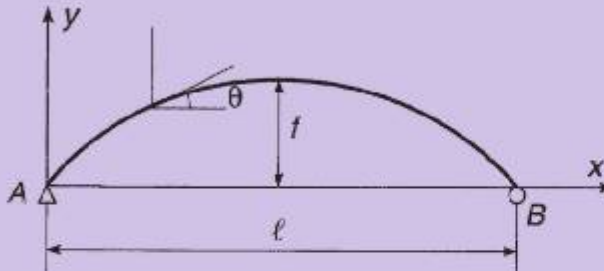


Figure 4.41

Par ailleurs, les inerties réduites I' et les sections réduites Ω' sont supposées constantes ; u_A représente le déplacement horizontal de l'appui A.

■ Cas 1 : Charge uniformément répartie

$$R_A = R_B = \frac{p\ell}{2}$$

$$Q_A = Q_B = 0$$

$$N = p \left(\frac{\ell}{2} - x \right) \sin \theta$$

$$M = \frac{px(\ell - x)}{2}$$

$$V = p \left(\frac{\ell}{2} - x \right) \cos \theta$$

$$u_A = -\frac{pf\ell^3}{15EI'}$$

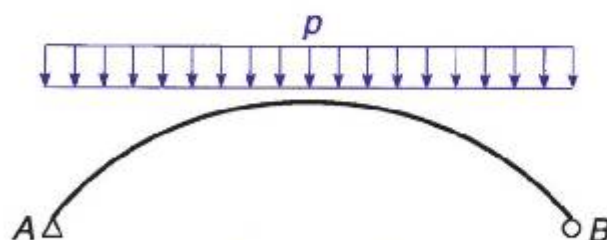


Figure 4.42

■ Cas 2 : Charge concentrée horizontale

$$R_A = -R_B = -\frac{Pb}{\ell}$$

$$Q_A = 0 \quad Q_B = P$$

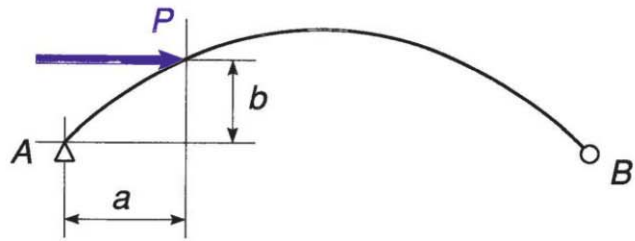


Figure 4.43

Pour $0 < x < a$ $N = -\frac{Pb}{\ell} \sin \theta$

$$M = -\frac{Pbx}{\ell}$$

$$V = -\frac{Pb}{\ell} \cos \theta$$

$$N = -\frac{Pb}{\ell} \sin \theta$$

Pour $a < x < \ell$ $M = -\frac{Pbx}{\ell} - P(y - b)$

$$V = -\frac{Pb}{\ell} \cos \theta$$

$$u_A = P(\ell - a) \left[\frac{4f^2}{15EI'} \left(2 - \frac{3a}{\ell} + \frac{2a^2}{\ell^2} + \frac{12a^3}{\ell^3} - \frac{8a^4}{\ell^4} \right) + \frac{1}{E\Omega'} \right]$$

Cas particulier :

$$a = b = 0$$

$$R_A = R_B = 0$$

$$N = P \cos \theta \quad M = -Py \quad V = -P \sin \theta$$

$$u_A = P\ell \left(\frac{8f^2}{15EI'} + \frac{1}{E\Omega'} \right)$$

■ Cas 3 : Charge concentrée verticale

$$R_A = \frac{P(\ell - a)}{\ell} \quad R_B = \frac{Pa}{\ell}$$

$$Q_A = Q_B = 0$$

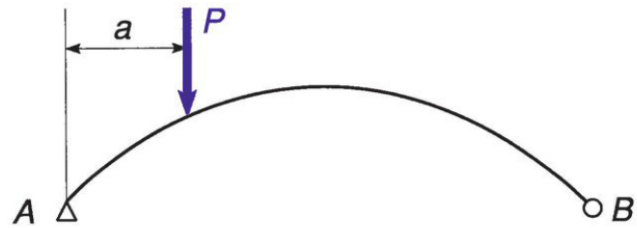


Figure 4.44

Pour $0 < x < a$

$$N = \frac{P(\ell - a)}{\ell} \sin \theta$$

$$M = \frac{P(\ell - a)}{\ell} x$$

$$V = \frac{P(\ell - a)}{\ell} \cos \theta$$

Pour $a < x < \ell$

$$N = -\frac{Pa}{\ell} \sin \theta$$

$$M = \frac{Pa}{\ell} (\ell - x)$$

$$V = \frac{Pa}{\ell} \cos \theta$$

Si $a < \frac{\ell}{2}$

$$u_A = -\frac{Pf^2 a}{12EI' \ell^4} (\ell^4 - \ell^3 x - 8\ell^2 x^2 + 20\ell x^3 - 12,8x^4)$$

Si $a > \frac{\ell}{2}$

$$u_A = -\frac{Pf^2 (\ell - x)}{12EI' \ell^4} (-0,8\ell^4 - 8,2\ell^3 x - 24,8\ell^2 x^2 + 31,2\ell x^3 - 12,8x^4)$$

Cas de charges combinées

Selon le principe de superposition et dans la limite des déformations élastiques, une déformation en un point dû à un système de forces extérieures est égale à la somme géométrique des déformations dues à chacune des forces du système agissant séparément. Les cas de charges des paragraphes (4.7) à (4.12) peuvent être combinées pour répondre à la recherche de cas de charges complexes.

Application

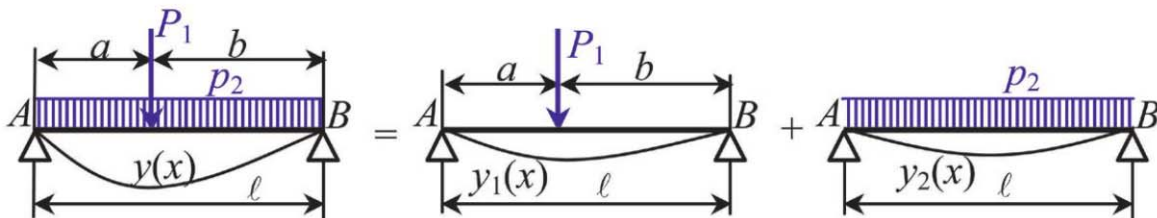


Figure 4.45

Soit figure 4.45, un cas de charges correspondant à la superposition des cas 1 (avec $P = P_1$) et cas 4 (avec $p = p_2$) du paragraphe 4.8. La déformée globale est obtenue à partir des formules respectives de ces deux cas simples.

Déformée globale :

$$0 < x < a \quad y' = y_1' + y_2' = -\frac{P_1 b}{6EI\ell} [a(\ell + b) - 3x^2] - \frac{p_2}{24EI} [\ell^3 - 6\ell x^2 + 4x^3]$$

$$y = y_1 + y_2 = \frac{P_1 b x}{6EI\ell} [\ell^2 - b^2 - x^2] - \frac{p_2 x}{24EI} [\ell^3 - 2\ell x^2 + x^3]$$

$$0 < x < a \quad y' = y_1' + y_2' = -\frac{P_1 a}{6EI\ell} [2\ell^2 - 6\ell x + 3x^2 + a^2] - \frac{p_2}{24EI} [\ell^3 - 6\ell x^2 + 4x^3]$$

$$y = y_1 + y_2 = \frac{P_1 a(\ell - x)}{6EI\ell} [x(2\ell - x) - a^2] - \frac{p_2 x}{24EI} [\ell^3 - 2\ell x^2 + x^3]$$

4.13 Calcul de déplacements par le théorème de Castigliano

4.13.1 Déplacement au droit d'une force (ou couple) extérieure

Démarche de calcul

- Rechercher les variations des efforts intérieurs dans le système en exploitant si besoin le principe de superposition (on pourra négliger sans trop d'erreur l'influence des efforts tranchants devant ceux des moments de flexion) ;
- Calculer l'expression du potentiel interne W du système étudié en fonction des forces F_i (ou couples) appliquées ;
- Le déplacement λ_i au droit et dans le sens de la force F_i est le résultat de la dérivée :

$$\frac{\partial W}{\partial F_i} = \lambda_i$$

Remarque

En présence d'appuis élastiques, compléter l'expression de W par le travail de déformation des appuis.

Application

Soit le cas de la figure 4.46 (situation du paragraphe 4.7, cas 1 avec $a = \ell$).

Moment de flexion : $M = -P(\ell - x)$

Potentiel intérieur (effort tranchant négligé) :

$$W = \frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{M^2}{EI} dx = \frac{P^2 \ell^3}{6EI}$$

Déplacement en B : $\lambda_B = \frac{\partial W}{\partial P} = \frac{P \ell^3}{3EI}$

(Résultat idem au 4.7, cas 1 au signe près car λ_B est compté ici dans le sens de P .)

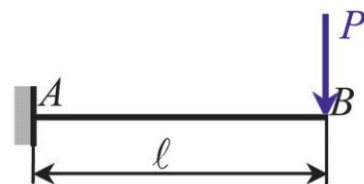


Figure 4.46

4.13.2 Déplacement dans une section S quelconque

Démarche de calcul (système à appuis indéformables)

- Définir au droit de la section S étudiée une force auxiliaire fictive F en complément du système de forces F_i extérieures ;
- Rechercher les variations des efforts intérieurs ;
- Calculer l'expression du potentiel interne W du système étudié en fonction des forces F et F_i (ou couples) appliquées (même remarque que 4.13.1) ;
- Le déplacement λ au droit de la section S est le résultat de la dérivée :

$$\left(\frac{\partial W}{\partial F} \right)_{F=0} = \lambda$$

4

Application 1

Même cas que figure 4.46, calcul du déplacement dans une section S située à une distance a de l'encastrement.

Une force F est introduite au droit de la section S (figure 4.47).

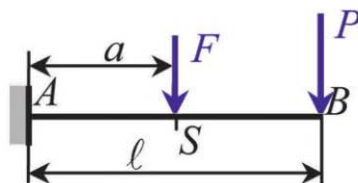


Figure 4.47

Moment de flexion obtenu par le principe de superposition :

$$0 < x < a \quad M = -P(\ell - x) - F(a - x)$$

$$a < x < \ell \quad M = -P(\ell - x)$$

Potentiel intérieur (effort tranchant négligé) :

$$W = \frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{M^2}{EI} dx = \frac{1}{2} \int_0^a \frac{(P(\ell - x) + F(a - x))^2}{EI} dx + \frac{1}{2} \int_a^\ell \frac{(P(\ell - x))^2}{EI} dx$$

$$W = \frac{P^2 \ell^3}{6EI} + \frac{F^2 a^3}{6EI} + \frac{PFa^2}{6EI} (3\ell - a)$$

Déplacement en S : $\lambda = \left(\frac{\partial W}{\partial F} \right)_{F=0} = \frac{Pa^2}{6EI} (3\ell - a)$

(Résultat idem au 4.7, cas 1 au signe près car λ est compté ici dans le sens de F .)

Application 2 : cas d'une charge répartie

En présence d'une seule charge répartie p , l'utilisation d'une charge auxiliaire fictive F est nécessaire. Considérons l'exemple de la figure 4.48 (4.7, cas 2) et recherchons le déplacement en B au droit d'une charge fictive F .

Moment de flexion obtenu par le principe de superposition :

$$M = -F(\ell - x) - \frac{p(\ell - x)^2}{2}$$

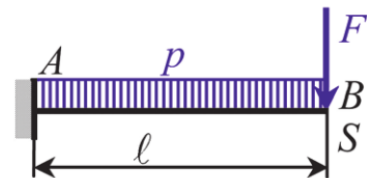


Figure 4.48

Potentiel intérieur (effort tranchant négligé) :

$$W = \frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{M^2}{EI} dx = \frac{F^2 \ell^3}{6EI} + \frac{Fp\ell^4}{8EI} + \frac{p^2 \ell^5}{40EI}$$

Déplacement en B : $\lambda = \left(\frac{\partial W}{\partial F} \right)_{F=0} = \frac{p\ell^4}{8EI}$

(Résultat idem au 4.7, cas 2 au signe près car λ est compté ici dans le sens de F .)

4.14 Calcul de déplacements par le théorème de réciprocité de Maxwell-Betti

L'application du **théorème de Maxwell-Betti** facilite le calcul de déplacements en exploitant la réciprocité entre deux cas de charges. Il ouvre sur l'utilisation des lignes d'influence.

Application directe

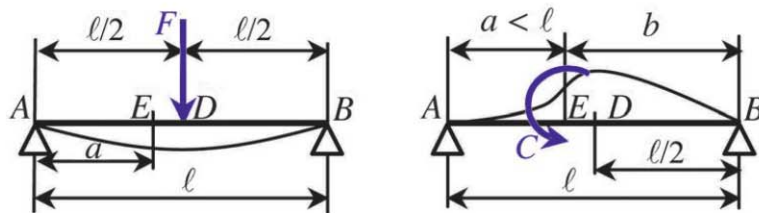


Figure 4.49

Considérons les deux cas de charges de la figure 4.49 : par application du théorème de réciprocité, le travail de la force F en D dans le déplacement dû à l'application du couple C est égal au travail du couple C en E dans la rotation de section due à l'application de la force F soit :

$$F\lambda_{D,C} = C\varphi_{E,F}$$

Considérons comme connus les résultats du paragraphe 4.8, cas 1 (cas particulier où la force F est au milieu de la poutre) : la rotation de section pour $x = a$ est donnée par :

$$\varphi_{E,F} = -\frac{F}{48EI}(3\ell^2 - 12a^2) = -\frac{F}{16EI}(\ell^2 - 4a^2)$$

En conséquence :

$$\lambda_{D,C} = \varphi_{E,F} \frac{C}{F} = -\frac{C}{16EI}(\ell^2 - 4a^2), \text{ déplacement algébrique compté}$$

dans le sens de F .

On retrouve plus aisément l'application pour $x = \frac{\ell}{2}$ du paragraphe 4.8, cas 11.

Généralisation : utilisation d'une ligne d'influence

En application du paragraphe 3.9.2, recherchons en utilisant la notion de ligne d'influence la flèche au milieu D d'une poutre sur deux appuis simples supportant un ensemble de n forces P_i appliquées dans des sections M_i d'abscisse α_i .

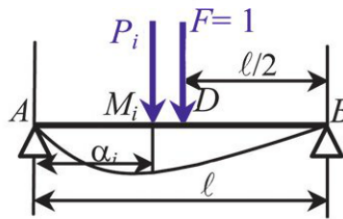


Figure 4.50

Considérons figure 4.50, une force unité $F=1$ appliquée en D provoquant un déplacement $\lambda_{M_i, F}$ en M_i dû à cette force. Les résultats du paragraphe 4.8, cas 1 permettent d'écrire (avec $F=1$) pour une moitié de poutre (au delà, les résultats sont obtenus par symétrie par rapport à D) :

$$0 < \alpha_i < \frac{\ell}{2} \quad \lambda_{M_i, F} = \frac{\alpha_i}{48EI} (3\ell^2 - 4\alpha_i^2)$$

Le théorème de réciprocité permet d'écrire pour chaque force P_i :

$$\lambda_{D, P_i} = P_i \lambda_{M_i, F} \quad (\text{avec } F=1).$$

Le tracé de la fonction $f(\alpha) = \frac{\alpha}{48EI} (3\ell^2 - 4\alpha^2)$ forme la **ligne d'influence** des déplacements au milieu D de la poutre (allure figure 4.51 pour une demi-poutre).

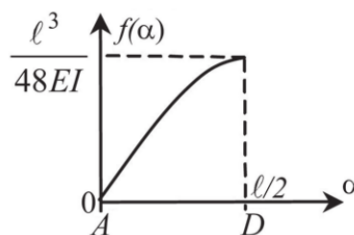


Figure 4.51

Le principe de superposition appliquée aux n forces permet d'écrire la flèche totale en D :

$$\lambda_D = \sum P_i f(\alpha_i)$$

À noter :

- La contribution d'une charge répartie $p(\alpha)$ appliquée entre deux abscisses α_1 et α_2 serait :

$$\lambda_{D,p} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(\alpha) p(\alpha) d\alpha$$

- Le raisonnement reste valable pour un chargement de type couple en recherchant la ligne d'influence associée.

5

Systèmes hyperstatiques

5.1 Poutres droites hyperstatiques à une travée

5.1.1 Travée encastrée élastiquement à ses extrémités A et B

Les appuis A et B sont supposés fixes ; la travée AB est encastrée élastiquement sur ses appuis, si les sections d'extrémité A et B subissent des rotations proportionnelles aux moments d'encastrement M_A et M_B :

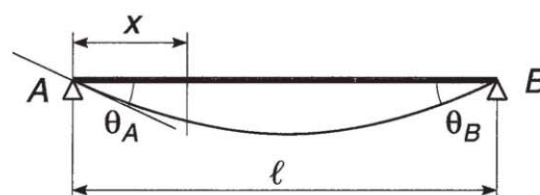


Figure 5.1

$$\theta_A = k_A M_A \quad \theta_B = k_B M_B \quad (5.1)$$

Les constantes k_A et k_B sont positives ; si ces constantes sont nulles, l'encastrement est parfait ; si elles sont infinies, l'appui est simple ; si elles ont une valeur finie, l'encastrement est partiel.

Soient le moment de flexion M_0 et l'effort tranchant V_0 que produiraient dans la section d'abscisse x , les charges appliquées si la poutre reposait sur appuis simples. Le moment de flexion M et l'effort tranchant V dans la section d'abscisse x de la poutre encastrée sont :

$$M = M_0 + M_A \frac{\ell - x}{\ell} + M_B \frac{x}{\ell} \quad (5.2)$$

$$V = V_0 + \frac{M_B - M_A}{\ell} \quad (5.3)$$

Les moments M_A et M_B sont liés aux rotations φ_A et φ_B que subirait la poutre à ses extrémités si elle était posée sur appuis simples, par les relations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} (a + k_A) M_A + b M_B &= \varphi_A \\ b M_A + (c + k_B) M_B &= -\varphi_B \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

a , b et c sont les coefficients de souplesse de la poutre :

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{1}{\ell^2} \int_0^\ell (\ell - x)^2 \frac{dx}{EI} \\ b &= \frac{1}{\ell^2} \int_0^\ell x(\ell - x)^2 \frac{dx}{EI} \\ c &= \frac{1}{\ell^2} \int_0^\ell x^2 \frac{dx}{EI} \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

On peut écrire alors :

$$\left. \begin{aligned} M_A &= \frac{b\varphi_B + (c + k_B)\varphi_A}{(a + k_A)(c + k_B) - b^2} \\ M_B &= \frac{b\varphi_A + (a + k_A)\varphi_B}{(a + k_A)(c + k_B) - b^2} \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

Les formules (5.4) peuvent s'écrire :

$$\left. \begin{aligned} \theta_A &= \varphi_A - aM_A - bM_B \\ \theta_B &= \varphi_B + bM_A + cM_B \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

Si la poutre est de section uniforme, les coefficients de souplesse ont pour valeur :

$$\left. \begin{aligned} a = c &= \frac{\ell}{3EI} \\ b &= \frac{\ell}{6EI} \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

On en déduit, dans ce cas :

$$\left. \begin{aligned} \theta_A &= \varphi_A - \frac{\ell}{6EI}(2M_A + M_B) \\ \theta_B &= \varphi_B + \frac{\ell}{6EI}(M_A + 2M_B) \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

Cas particuliers

– Encastrements parfaits aux deux extrémités :

$$\left. \begin{aligned} (k_A = k_B = 0) \\ M_A &= \frac{b\varphi_B + c\varphi_A}{ac - b^2} \\ M_B &= \frac{b\varphi_A + a\varphi_B}{ac - b^2} \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

Pour une poutre de section uniforme, on a donc, d'après (5.8) :

$$\left. \begin{aligned} M_A &= \frac{2EI}{\ell}(2\varphi_A + \varphi_B) \\ M_B &= -\frac{2EI}{\ell}(\varphi_A + 2\varphi_B) \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

– Encastrement parfait à une extrémité, appui simple à l'autre :



Figure 5.2

$$\text{Si } k_A = \infty \text{ et } k_B = 0 : \quad M_B = -\frac{\varphi_B}{c} \quad (5.12)$$

$$\text{et si } I \text{ est constant :} \quad M_B = -\frac{3EI}{\ell} \varphi_B \quad (5.13)$$

$$\text{Inversement, si } k_A = 0 \text{ et } k_B = \infty : \quad M_B = \frac{\varphi_A}{a} \quad (5.14)$$

$$\text{et si } I \text{ est constant :} \quad M_A = \frac{3EI}{\ell} \varphi_A \quad (5.15)$$

5.1.2 Formulaire de la poutre sur un appui simple et un appui à encastrement parfait

Principe

- Pour un cas de charge, calculer M_B avec la formule (5.13).
- Les réactions (R_A , R_B), les sollicitations (M , V) et les déplacements (y' , y) sont déterminés par superpositions des résultats des cas suivants :

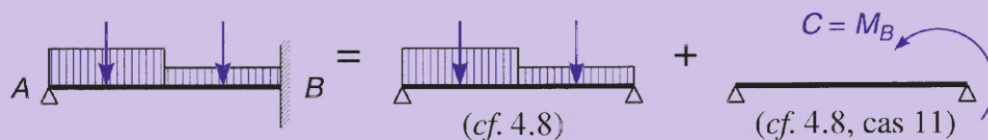


Figure 5.3

Soit, en affectant l'indice 0 aux paramètres de la poutre sur deux appuis simples :

$$\left. \begin{aligned} R_A &= R_{A0} + \frac{M_B}{\ell} & R_b &= R_{B0} - \frac{M_B}{\ell} \\ M &= M_0 + M_B \frac{x}{\ell} & V &= V_0 + \frac{M_B}{\ell} \\ y' &= y'_0 - \frac{M_B}{6EI\ell}(\ell^2 - 3x^2) & y &= y_0 - \frac{M_B}{6EI\ell}x(\ell^2 - x^2) \\ \theta_A &= \varphi_A - \frac{M_B}{6EI}\ell \quad \text{pour } x = 0 \end{aligned} \right\} (5.16)$$

– Tracé des courbes représentatives des moments de flexion et efforts tranchants :

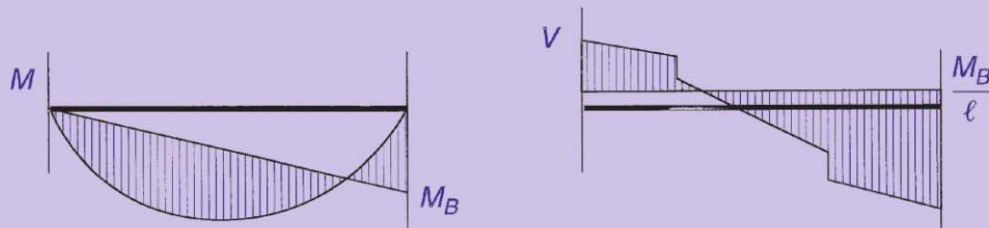


Figure 5.4

Valeurs du moment d'encastrement :

■ Cas 1 : charge concentrée

$$M_B = -\frac{Pb}{2} \left(1 - \frac{b}{\ell}\right) \left(2 - \frac{b}{\ell}\right)$$

$$M_{\max} = -\frac{Pa}{2} \left(1 - \frac{a}{\ell}\right)^2 \left(2 + \frac{a}{\ell}\right) \quad \text{pour } x = a$$

$$\theta_A = -\frac{Pa(\ell - a)^2}{4EI\ell}$$

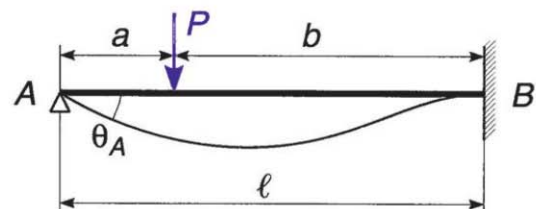


Figure 5.5

■ Cas 2 : charge uniforme partielle

$$M_B = -\frac{p\ell^2}{8} \left[1 - \frac{a^2}{\ell^2} \left(2 - \frac{a^2}{\ell^2} \right) - \frac{c^2}{\ell^2} \left(2 - \frac{c}{\ell} \right)^2 \right]$$

$$M_{\max} \text{ pour } x = a + \frac{b(b+2c)}{2\ell} + \frac{M_B}{p\ell}$$

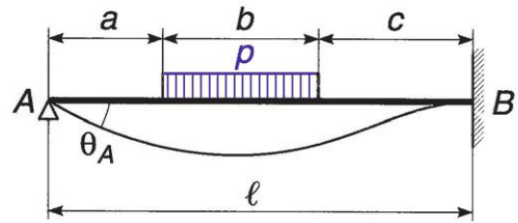


Figure 5.6

■ Cas 3 : charge uniforme partielle près de l'appui libre

$$M_B = -\frac{pa^2}{8} \left(2 - \frac{a^2}{\ell^2} \right)$$

$$M_{\max} \text{ pour } x = a \left[1 - \frac{3a}{4\ell} + \frac{1}{8} \left(\frac{a}{\ell} \right)^3 \right]$$

$$\theta_A = -\frac{pa^2}{48EI\ell} (6\ell^2 - 8a\ell + 3a^2)$$

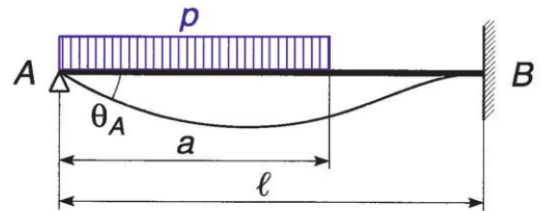


Figure 5.7

■ Cas 3' : charge uniforme partielle près de l'appui encastré

$$M_B = -\frac{pa^2}{8} \left(2 - \frac{a}{\ell} \right)^2$$

$$M_{\max} \text{ pour } x = \ell - a \left[1 - \frac{a^2}{4\ell^2} \left(2 - \frac{a}{2\ell} \right) \right]$$

$$\theta_A = -\frac{p\ell^2}{48EI} (4\ell - 3a)$$

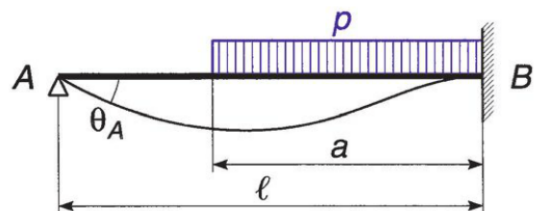


Figure 5.8

■ Cas 4 : charge uniformément répartie

$$M_B = -\frac{p\ell^2}{8} \quad R_A = \frac{3p\ell}{8} \quad R_B = \frac{5p\ell}{8}$$

$$M_{\max} = \frac{9p\ell^2}{128} \quad \text{pour } x = \frac{3\ell}{8}$$

$$\theta_A = \frac{p\ell^3}{48EI}$$

$$y_{\max} = -0,0054 \frac{p\ell^4}{EI} \quad \text{pour } x = 0,421\ell$$

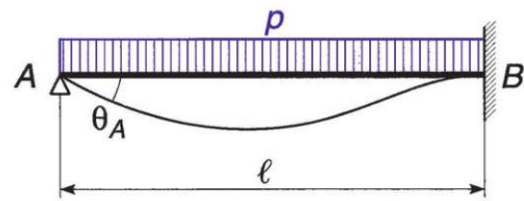


Figure 5.9

■ Cas 5 : charge triangulaire

$$\text{pour } a < b \quad M_B = -\frac{p(\ell+a)(7\ell^2-3a^2)}{120\ell}$$

$$\text{pour } a > b \quad M_B = -\frac{p(\ell+b)(7\ell^2-3b^2)}{120\ell}$$

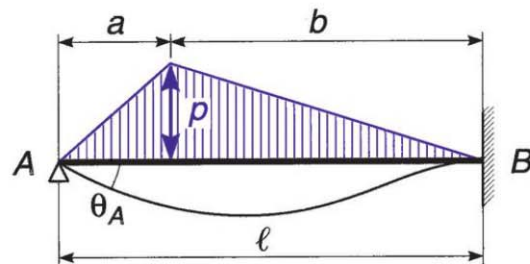


Figure 5.10

■ Cas 6 : charge triangulaire symétrique

$$M_B = \frac{5p\ell^2}{64}$$

$$R_A = \frac{11p\ell}{64} \quad R_B = \frac{21p\ell}{64}$$

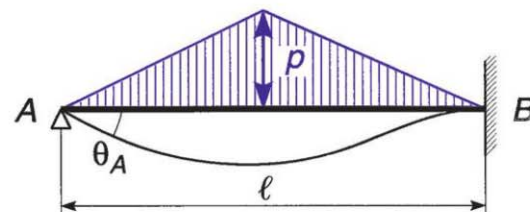


Figure 5.11

$$M_{\max} = 0,08p\ell^2 \quad \text{pour } x = 0,415\ell \quad \theta_A = -\frac{5p\ell^3}{384EI}$$

■ Cas 7 : charge triangulaire linéaire

$$M_B = -\frac{p\ell^2}{15}$$

$$R_A = \frac{p\ell}{10} \quad R_B = \frac{2p\ell}{5}$$

$$M_{\max} = 0,0298p\ell^2 \quad \text{pour } x = 0,447\ell$$

$$\theta_A = -\frac{p\ell^3}{120EI}$$

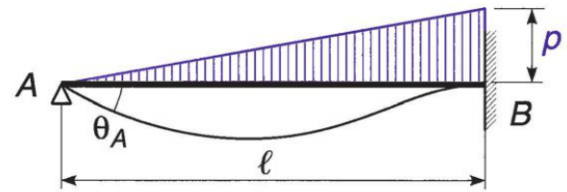


Figure 5.12

■ Cas 7' : charge triangulaire linéaire

$$M_B = \frac{7p\ell^2}{120}$$

$$R_A = \frac{9p\ell}{40} \quad R_B = \frac{11p\ell}{40}$$

$$M_{\max} = 0,0423p\ell^2 \quad \text{pour } x = 0,329\ell$$

$$\theta_A = -\frac{p\ell^3}{80EI}$$

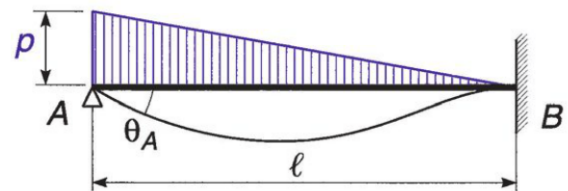


Figure 5.13

■ Cas 8 : charges triangulaires symétriques opposées

$$M_B = +\frac{p\ell^2}{120} \quad R_A = -R_B = \frac{21p\ell}{120}$$

$$\theta_A = -\frac{p\ell^3}{240EI}$$

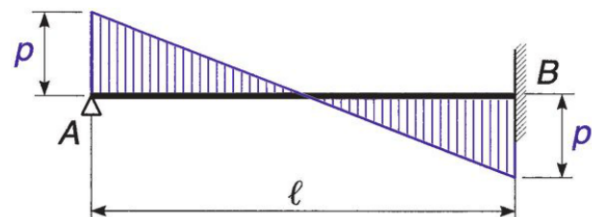


Figure 5.14

Dans le cas où le chargement est inversé, les expressions demeurent valables aux signes près.

■ Cas 9 : charge trapézoïdale symétrique

$$M_B = -\frac{p}{8\ell}[\ell^2 - a^2(2\ell - a)]$$

$$\theta_A = -\frac{p}{48EI}[\ell^3 - a^2(2\ell - a)]$$

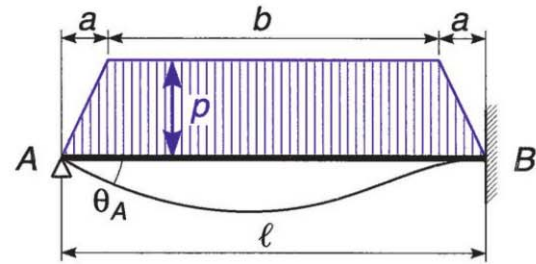


Figure 5.15

■ Cas 10 : charge parabolique

$$M_B = -\frac{p\ell^2}{10}$$

$$R_A = \frac{7p\ell}{30} \quad R_B = \frac{13p\ell}{30}$$

$$\theta_A = -\frac{p\ell^3}{60EI}$$

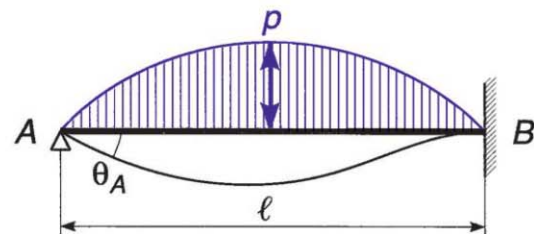


Figure 5.16

■ Cas 11 : couple en un point quelconque

$$M_B = \frac{C}{2} \left[1 - 3\left(\frac{a}{\ell}\right)^2 \right]$$

$$R_A = -R_B = \frac{3C}{2\ell} \left[1 - \left(\frac{a}{\ell}\right)^2 \right]$$

$$\theta_A = -\frac{C}{4EI\ell}(\ell - a)(\ell - 3a)$$

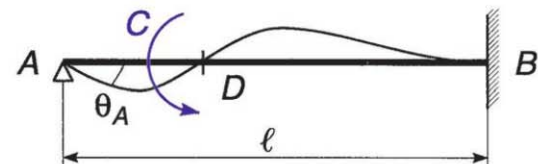


Figure 5.17

■ Cas 12 : appui dénivelé

$$R_A = -R_B = \frac{3EId}{\ell^3}$$

$$M_B = \frac{3EId}{\ell^2} \quad M = \frac{3EId}{\ell^3}x$$

$$y = -\frac{xd}{2\ell^3}(3\ell^2 - x^2) \quad \theta_A = -\frac{3}{2} \cdot \frac{d}{\ell}$$

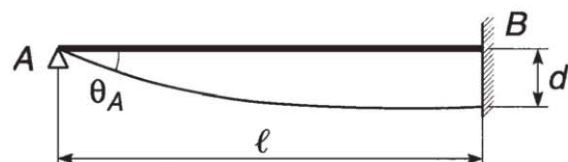


Figure 5.18

■ **Cas 13 : Gradient de température Δt entre face supérieure et face inférieure** (*hauteur de la section = h*)

$$R_A = -R_B = \frac{3}{2} \cdot \frac{EI\alpha\Delta t}{h\ell}$$

$$M_B = \frac{3}{2} \cdot \frac{EI\alpha\Delta t}{h}$$

(contraintes de traction sur la face la plus froide).

Déformée : point d'inflexion pour $x = \frac{2}{3}\ell$.

■ **Cas 14 : Action d'un câble tendu**

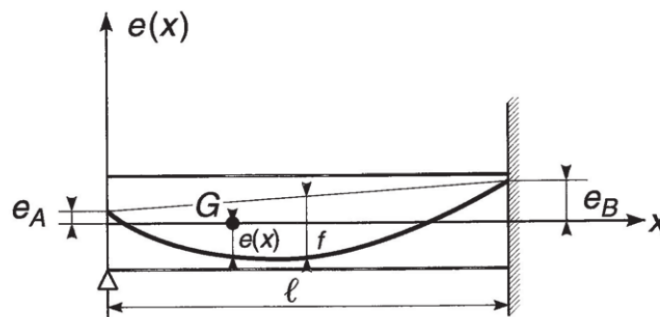


Figure 5.19

F représente l'effort de traction dans le câble et $e(x)$ le point de passage du câble dans la section d'abscisse x .

Le câble est supposé parabolique :

$$e(x) = e_A + (e_B - e_A)\frac{x}{\ell} - \frac{4f}{\ell^2}x(\ell - x)$$

$$M_B = F_0 \left(f - \frac{2e_B + e_A}{2} \right)$$

où F_0 représente la projection, supposée constante, de F sur la ligne moyenne de la poutre.

5.1.3 Formulaire de la poutre encastrée à ses deux extrémités

Principe

- Pour un cas de charge, calculer M_A et M_B avec les formules (5.11).
- Les réactions (R_A et R_B), les sollicitations (M , V) et les déplacements (y' , y) sont déterminés par superposition des résultats des cas suivants :

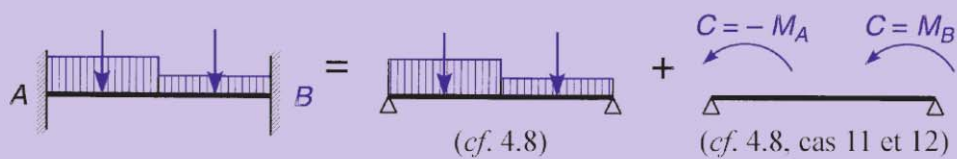


Figure 5.20

Soit, en affectant l'indice 0 aux paramètres de la poutre sur deux appuis simples :

$$\left. \begin{aligned} R_A &= R_{A0} + \frac{M_B - M_A}{\ell} & R_B &= R_{B0} + \frac{M_B - M_A}{\ell} \\ M &= M_0 + M_A \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) + M_B \frac{x}{\ell} & V &= V_0 + \frac{M_B - M_A}{\ell} \\ y' &= y'_0 - \frac{\ell}{6EI} \left[2M_A + M_B + 3(M_A - M_B) \left(\frac{x}{\ell}\right)^2 - 6M_A \frac{x}{\ell} \right] \\ y &= y_0 - \frac{\ell x}{6EI} \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \left(2M_A + M_B + (M_B - M_A) \frac{x}{\ell} \right) \end{aligned} \right\} (5.17)$$

- Tracés des courbes représentatives des moments de flexion et efforts tranchants

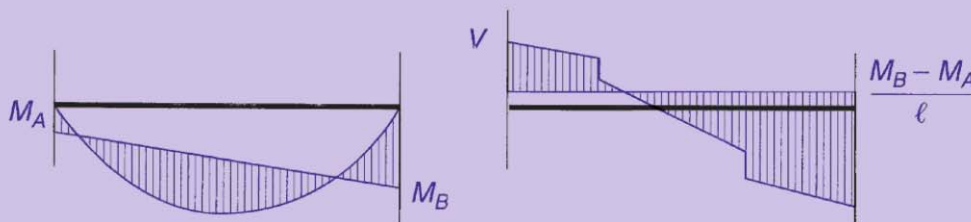


Figure 5.21

Valeurs des moments d'encastrement :

■ Cas 1 : charge concentrée

$$M_A = -\frac{Pab^2}{\ell^2} \quad M_B = -\frac{Pba^2}{\ell^2}$$

$$R_A = \frac{Pb^2}{\ell^3}(3a + b)$$

$$R_B = \frac{Pa^2}{\ell^3}(3b + a)$$

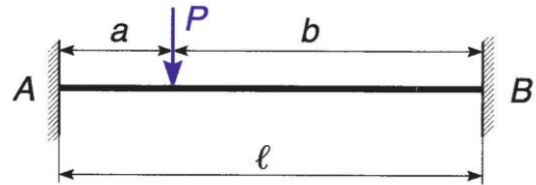


Figure 5.22

$$M_{\max} = \frac{2Pa^2b^2}{\ell^3} \quad \text{pour } x = a$$

■ Cas 2 : charge uniforme partielle

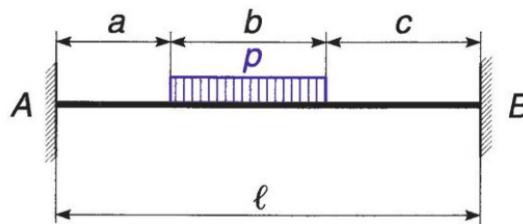


Figure 5.23

$$M_A = -\frac{pb}{24\ell^2}[(b + 4c - 2a)(4\ell^2 - b^2) - 2(b + 2c)^3 + (b + 2a)^3]$$

$$M_B = -\frac{pb}{24\ell^2}[(b + 4a - 2c)(4\ell^2 - b^2) - 2(b + 2a)^3 + (b + 2c)^3]$$

$$M_{\max} \quad \text{pour } x = a + \frac{b(b + 2c)}{2\ell} + \frac{M_B - M_A}{p\ell}$$

■ Cas 3 : charge uniforme partielle près d'un appui

$$M_A = -\frac{pa^2}{12} \left[6 - 8\frac{a}{\ell} + 3\left(\frac{a}{\ell}\right)^2 \right]$$

$$M_B = -\frac{pa^2}{12} \left[4\frac{a}{\ell} - 3\left(\frac{a}{\ell}\right)^2 \right]$$

$$M_{\max} \text{ pour } x = \frac{a}{2} \left[2 - 2\left(\frac{a}{\ell}\right)^2 + \left(\frac{a}{\ell}\right)^3 \right]$$

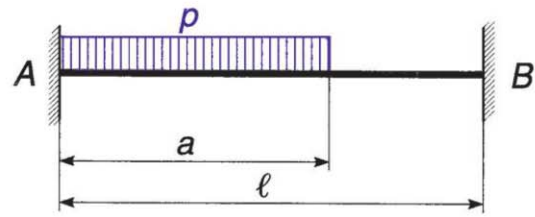


Figure 5.24

■ Cas 4 : charge uniformément répartie

$$M_A = M_B = -\frac{p\ell^2}{12} \quad R_A = R_B = \frac{p\ell}{2}$$

$$M_{\max} = \frac{p\ell^2}{24} \quad \text{pour } x = \frac{\ell}{2}$$

$$y_{\max} = -\frac{p\ell^4}{384EI} \quad \text{pour } x = \frac{\ell}{2}$$

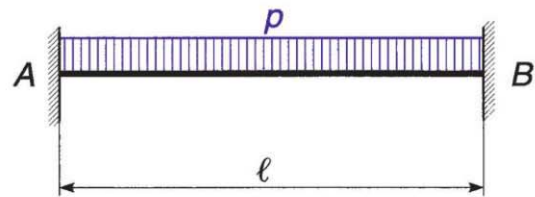


Figure 5.25

■ Cas 5 : charge triangulaire

On suppose $a < b$

$$M_A = -\frac{p}{60\ell} [7\ell^2 b - \ell(2b^2 - a^2) - 2b^3 + a^3]$$

$$M_B = -\frac{p}{60\ell} [7\ell^2 a - \ell(2a^2 - b^2) - 2a^3 + b^3]$$

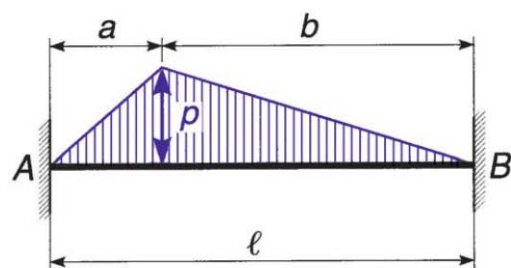


Figure 5.26

■ Cas 6 : charge triangulaire symétrique

$$M_A = M_B = -\frac{5p\ell^2}{96}$$

$$R_A = R_B = \frac{p\ell}{4}$$

$$M_{\max} = \frac{p\ell^2}{32} \quad \text{pour } x = \frac{\ell}{2}$$

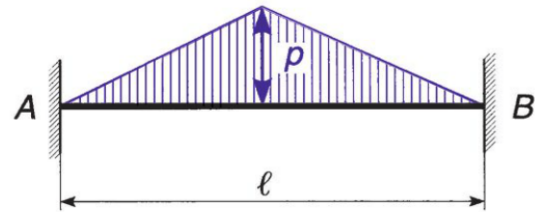


Figure 5.27

■ Cas 7 : charge triangulaire linéaire

$$M_A = -\frac{p\ell^2}{30} \quad M_B = -\frac{p\ell^2}{20}$$

$$R_A = \frac{3p\ell}{20} \quad R_B = \frac{7p\ell}{20}$$

$$M_{\max} = 0,0215p\ell^2 \quad \text{pour } x = 0,548\ell$$

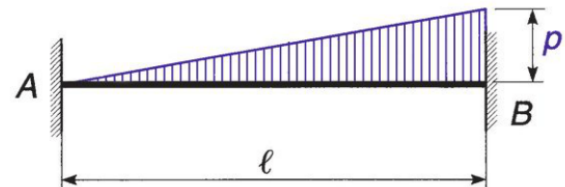


Figure 5.28

■ Cas 8 : charges triangulaires symétriques opposées

$$M_A = -\frac{p\ell^2}{60} \quad M_B = \frac{p\ell^2}{60}$$

$$R_A = \frac{p\ell}{5} \quad R_B = \frac{p\ell}{5}$$

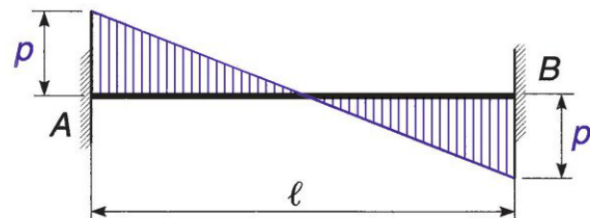


Figure 5.29

■ Cas 9 : charge trapézoïdale symétrique

$$M_A = M_B = -\frac{p\ell^2}{12} \left[1 - 2\left(\frac{a}{\ell}\right)^2 + \left(\frac{a}{\ell}\right)^3 \right]$$

$$R_A = R_B = \frac{p(\ell - a)}{2}$$

$$M_{\max} = \frac{p\ell^2}{24} \left[1 - 2\left(\frac{a}{\ell}\right)^3 \right] \quad \text{pour } x = \frac{\ell}{2}$$

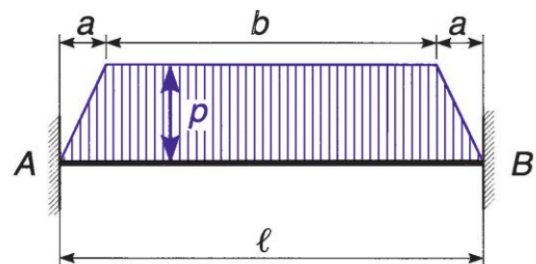


Figure 5.30

■ Cas 10 : charge parabolique

$$M_A = M_B = -\frac{p\ell^2}{15}$$

$$R_A = R_B = \frac{p\ell}{3}$$

$$M_{\max} = \frac{3p\ell^2}{80} \quad \text{pour } x = \frac{\ell}{2}$$

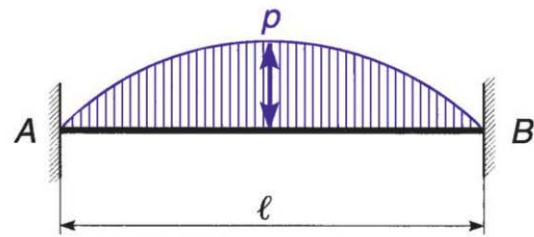


Figure 5.31

■ Cas 11 : couple en un point quelconque

$$M_A = -\frac{Cb}{\ell^2}(2\ell - 3b)$$

$$M_B = \frac{Ca}{\ell^2}(2\ell - 3a)$$

$$R_A = -R_B = \frac{6ab}{\ell^3}C$$

$$M = \frac{Cb}{\ell} \left[1 - 3\left(\frac{a}{\ell}\right) + 6\left(\frac{a}{\ell}\right)^2 \right] \quad \text{pour } x = a - \epsilon.$$

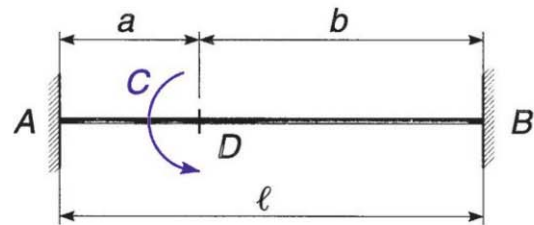


Figure 5.32

■ Cas 12 : appui dénivelé

$$R_A = -R_B = \frac{12EI d}{\ell^3}$$

$$M_A = -M_B = -\frac{6EI d}{\ell^2}$$

$$M = -\frac{6EI d}{\ell^3}(\ell - 2x)$$

$$y = -\frac{d}{\ell^3}x^2(3\ell - 2x)$$

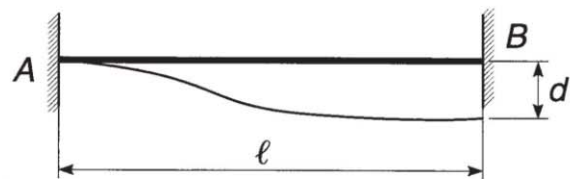


Figure 5.33

■ **Cas 13 : Gradient de température Δt entre face supérieure et face inférieure** (*hauteur de la section = h*)

$$R_A = R_B = 0 \quad y = 0$$

en tout point moment constant $M = \frac{EI\alpha\Delta t}{h}$ (contraintes de traction sur la face la plus froide).

■ **Cas 14 : Action d'un câble tendu**

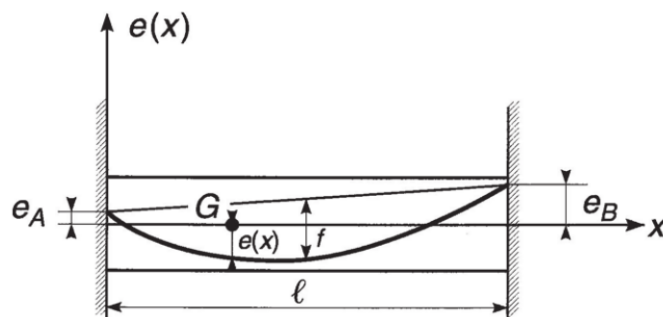


Figure 5.34

F représente l'effort de traction dans le câble et $e(x)$ le point de passage du câble dans la section d'abscisse x .

Le câble est supposé parabolique :

$$e(x) = e_A + (e_B - e_A)\frac{x}{\ell} - \frac{4f}{\ell^2}x(\ell - x)$$

$$M_A = F_0\left(\frac{2}{3}f - e_A\right) \quad M_B = F_0\left(\frac{2}{3}f - e_B\right)$$

où F_0 représente la projection, supposée constante, de F sur la ligne moyenne de la poutre.

5.1.4 Détermination de réactions hyperstatiques de liaison par le théorème de Ménabréa

Démarche de calcul

- Déterminer le degré d'hyperstatisme et définir les réactions hyperstatiques R_i associées aux liaisons surabondantes ;
- Rechercher les variations des efforts intérieurs et calculer l'expression du potentiel interne W du système étudié en fonction des réactions hyperstatiques et des autres charges extérieures ;
- Les réactions hyperstatiques ne travaillant pas pendant la déformation du système, on peut écrire :

$$\frac{\partial W}{\partial R_i} = 0$$

5

Application directe

Reprenons figure 5.35, le cas hyperstatique de degré 1 de la figure 5.9 du paragraphe 5.1.2 (cas 4) et substituons à l'appui simple en A la réaction hyperstatique R_A correspondante.

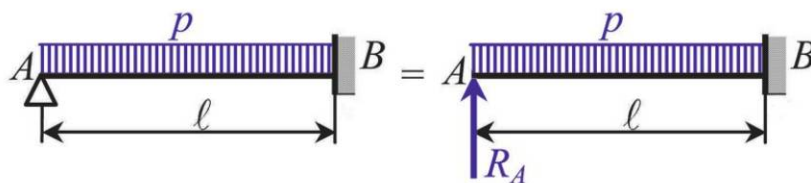


Figure 5.35

Moment de flexion : $M = R_A x - \frac{p}{2} x^2$

Potentiel intérieur (effort tranchant négligé) :

$$W = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \left(\frac{R_A^2 l^3}{3} + \frac{p^2 l^5}{20} + \frac{R_A p l^4}{4} \right)$$

Application du théorème de Ménabréa :

$$\frac{\partial W}{\partial R_A} = \frac{1}{2EI} \left(\frac{2R_A l^3}{3} - \frac{pl^4}{4} \right) = 0 \text{ soit } R_A = \frac{3pl}{8} \text{ (résultat du cas 4).}$$

Application en présence d'un appui élastique

Reprenons figure 5.36 le cas précédent en remplaçant l'appui invariable en A par un appui élastique de raideur k . La réaction R_A est repoussée au-delà de la partie élastique de l'appui.

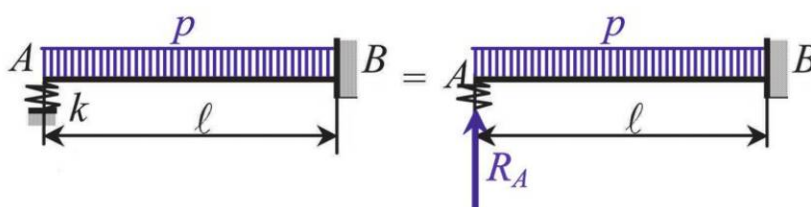


Figure 5.36

Le potentiel intérieur se voit augmenté du travail de déformation de l'appui élastique :

$$W = \frac{1}{2EI} \left(\frac{R_A^2 l^3}{3} + \frac{p^2 l^5}{20} - \frac{R_A p l^4}{3} \right) + \frac{R_A^2}{2k}$$

Le théorème de Ménabréa permet alors d'écrire :

$$\frac{\partial W}{\partial R_A} = \frac{1}{2EI} \left(\frac{2R_A l^3}{3} - \frac{pl^4}{4} \right) + \frac{R_A}{k} = 0$$

$$\text{soit } R_A = \frac{3 p k l^4}{8(k l^3 + 3EI)}.$$

5.2 Poutres continues

5.2.1 Définitions et notations

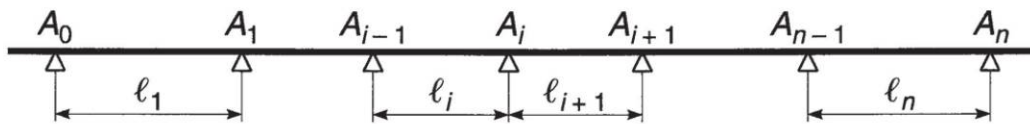


Figure 5.37

Une poutre continue est une poutre reposant sur plus de deux appuis simples. Pour une poutre de n travées, on numérote les appuis de 0 à n . La travée i de portée l_i est la travée comprise entre les appuis A_{i-1} et A_i .

Le nombre des inconnues hyperstatiques est égal au nombre des appuis intermédiaires ($n - 1$). On peut choisir comme inconnues les moments de flexion sur les appuis intermédiaires.

Lorsque ces inconnues sont déterminées, le moment de flexion et l'effort tranchant dans une section quelconque sont calculés à l'aide des formules (5.2) et (5.3).

Si V_{ie} et V_{iw} sont les efforts tranchants à droite et à gauche de l'appui i , la réaction d'appui R_i est :

$$R_i = V_{ie} - V_{iw} \quad (5.18)$$

(par convention : e = est = droite ; w = ouest = gauche).

5.2.2 Équation des trois moments (ou de Clapeyron)

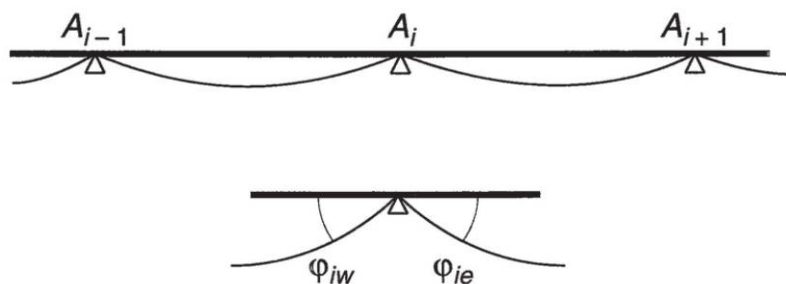


Figure 5.38

En exprimant, à l'aide des formules (5.7), que les rotations θ_{ie} et θ_{iw} de part et d'autre d'un appui intermédiaire sont égales, on trouve entre les moments sur trois appuis consécutifs, la relation suivante :

$$b_i M_{i-1} + (c_i + a_{i+1}) M_i + b_{i+1} M_{i+1} = \varphi_{ie} - \varphi_{iw} \quad (5.19)$$

Poutre à inertie constante

Si la poutre a une inertie constante, on a :

$$a_i = c_i = 2b_i = \frac{\ell_i}{3EI}$$

et la relation des trois moments s'écrit :

$$\ell_i M_{i-1} + 2(\ell_i + \ell_{i+1}) M_i + \ell_{i+1} M_{i+1} = 6EI(\varphi_{ie} - \varphi_{iw}) \quad (5.20)$$

Pour les valeurs de φ , voir paragraphe 4.8.

On a au total $(n - 1)$ relations permettant de calculer les $(n - 1)$ inconnues hyperstatiques.

Si un appui d'extrémité de la poutre continue constitue un encastrement parfait (A_1 par exemple), on en tient compte en écrivant $\ell_1 = 0$ dans la relation des trois moments correspondante.

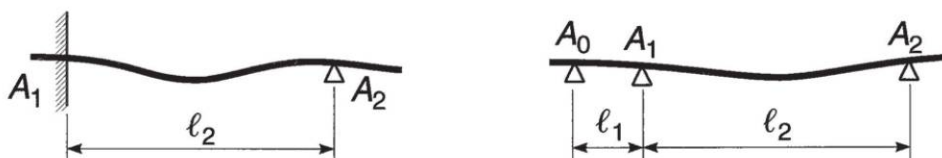


Figure 5.39

5.2.3 Effets des dénivellations d'appui sur la poutre non chargée

Les dénivellations sont comptées positivement vers le haut :

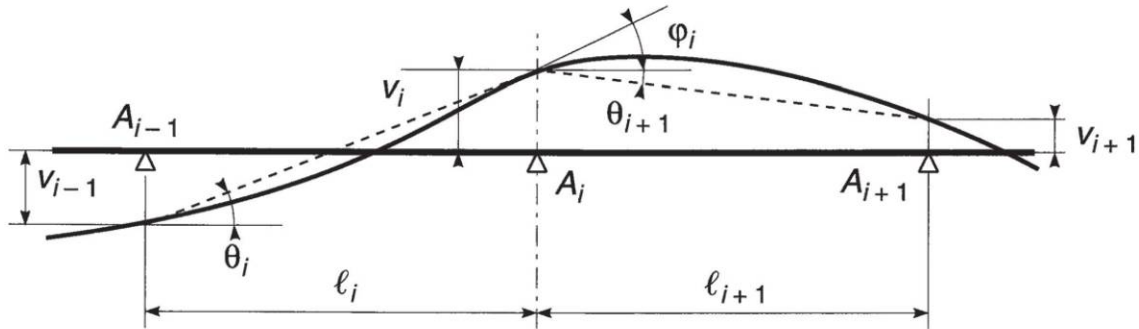


Figure 5.40

On connaît $\theta_i = \frac{v_i - v_{i-1}}{\ell_i}$ $\theta_{i+1} = \frac{v_{i+1} - v_i}{\ell_{i+1}}$

Les équations (5.7) s'écrivent :

$$\varphi_i - \theta_i = b_i M_{i-1} + c_i M_i \quad (\text{travée } i)$$

$$\varphi_i - \theta_{i+1} = -a_{i+1} M_i - b_{i+1} M_{i+1} \quad (\text{travée } i+1)$$

En éliminant φ_i , on obtient la relation des trois moments correspondant aux dénivellations d'appui :

$$\begin{aligned} b_i M_{i-1} + (c_i + a_{i+1}) M_i + b_{i+1} M_{i+1} &= \theta_{i+1} - \theta_i \\ &= \frac{v_{i+1} - v_i}{\ell_{i+1}} - \frac{v_i - v_{i-1}}{\ell_i} \end{aligned} \quad (5.21)$$

Les moments dans la poutre chargée, sur appuis dénivelés, sont calculés par superposition des moments dus aux dénivellations d'appui et des moments dus aux charges.

5.2.4 Formulaire de la poutre continue à travées égales

Les valeurs extrêmes des moments en travée et sur appuis, des efforts tranchants sur appui et des réactions d'appui sont données pour une charge p uniformément répartie sur toute la poutre, et pour une charge variable s uniformément répartie occupant les positions les plus défavorables par travées entières.

La poutre est de section uniforme, les appuis ne sont pas dénivelés.

■ Cas 1 : deux travées égales

$$M_{\max} = \frac{p\ell^2}{14,3} + \frac{s\ell^2}{10,5}$$

$$M_{1\min} = -\frac{(p + s)\ell^2}{8}$$

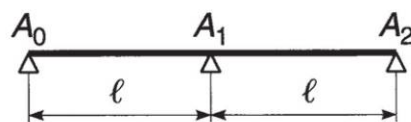


Figure 5.41

$$V_{0\max} = R_{0\max} = 0,3750p\ell + 0,4375s\ell$$

$$R_{1\max} = 1,25(p + s)\ell$$

$$V_{1\min} = 0,3750p\ell - 0,0625s\ell$$

$$V_{1w\max} = -0,625p\ell$$

$$V_{1w\min} = -0,625(p + s)\ell$$

■ Cas 2 : trois travées égales

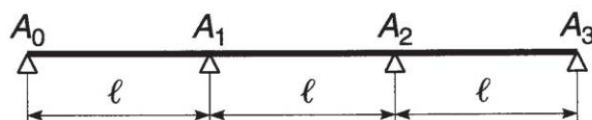


Figure 5.42

$$M_{\max} = \frac{p\ell^2}{12,5} + \frac{s\ell^2}{10} \quad \text{en travée de rive}$$

$$M_{\max} = \frac{p\ell^2}{40} + \frac{s\ell^2}{13,3} \quad \text{en travée centrale}$$

$$M_{1\min} = -\frac{p\ell^2}{10} - \frac{s\ell^2}{8,6}$$

$$V_{0\max} = R_{0\max} = 0,40p\ell + 0,45s\ell$$

$$R_{1\max} = 1,1p\ell + 1,2s\ell$$

$$V_{0\min} = 0,40p\ell - 0,05s\ell$$

$$V_{1w\max} = -0,6000p\ell + 0,01067s\ell$$

$$V_{1w\min} = -0,6000p\ell - 0,6167s\ell$$

$$V_{1e\max} = 0,5000p\ell + 0,5833s\ell$$

$$V_{1e\min} = 0,5000p\ell - 0,0833s\ell$$

■ Cas 3 : quatre travées égales

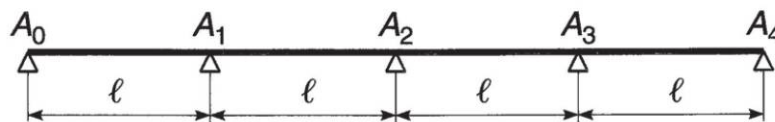


Figure 5.43

$$M_{\max} = \frac{p\ell^2}{12,9} + \frac{s\ell^2}{10,2} \quad \text{en travée de rive}$$

$$M_{\max} = \frac{p\ell^2}{28} + \frac{p\ell^2}{12,4} \quad \text{en travée intermédiaire}$$

$$M_{1\min} = -\frac{p\ell^2}{9,3} - \frac{s\ell^2}{8,3}$$

$$M_{2\min} = -\frac{p\ell^2}{14} - \frac{s\ell^2}{9,3}$$

$$V_{0\max} = R_{0\max} = 0,3929p\ell + 0,4464s\ell$$

$$R_{1\max} = 1,1428p\ell + 1,2232s\ell$$

$$R_{2\max} = 0,9286p\ell + 1,1428s\ell$$

$$V_{0\min} = 0,3924p\ell - 0,0535s\ell$$

$$V_{1w\max} = -0,6071p\ell + 0,0134s\ell$$

$$V_{1w\min} = -0,6071p\ell - 0,6205s\ell$$

$$V_{1e\max} = 0,5357p\ell + 0,6027s\ell$$

$$V_{1e\min} = 0,5357p\ell - 0,067s\ell$$

$$V_{2w\max} = -0,4643p\ell + 0,1071s\ell$$

$$V_{2w\min} = -0,4643p\ell - 0,5714s\ell$$

■ Cas 4 : cinq travées égales

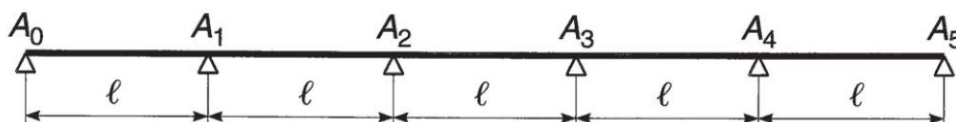


Figure 5.44

$$M_{\max} = \frac{p\ell^2}{12,8} + \frac{s\ell^2}{10,1} \quad \text{en travée de rive}$$

$$M_{\max} = \frac{p\ell^2}{30,4} + \frac{s\ell^2}{12,7} \quad \text{en 2^e et 4^e travée}$$

$$M_{\max} = \frac{p\ell^2}{21,6} + \frac{s\ell^2}{11,7} \quad \text{en travée centrale}$$

$$M_{1\min} = -\frac{p\ell^2}{9,5} - \frac{s\ell^2}{8,4}$$

$$M_{2\min} = -\frac{p\ell^2}{12,7} - \frac{s\ell^2}{8,9}$$

$$V_{0\max} = R_{0\max} = 0,3947p\ell + 0,4474s\ell$$

$$R_{1\max} = 1,1316p\ell + 1,2177s\ell$$

$$R_{2\max} = 0,9737p\ell + 1,1675s\ell$$

$$V_{0\min} = 0,3947p\ell - 0,0526s\ell$$

$$V_{1w\max} = -0,6053p\ell + 0,0144s\ell$$

$$V_{1w\min} = -0,6053p\ell - 0,6196s\ell$$

$$V_{1e\max} = 0,5263p\ell + 0,5981s\ell$$

$$V_{1e\min} = 0,5263p\ell - 0,0718s\ell$$

$$V_{2w\max} = -0,4737p\ell + 0,1029s\ell$$

$$V_{2w\min} = -0,4737p\ell - 0,5766s\ell$$

$$V_{2e\max} = 0,5000p\ell + 0,5909s\ell$$

$$V_{2e\min} = 0,5000p\ell - 0,0909s\ell$$

■ Cas 5 : une infinité de travées égales

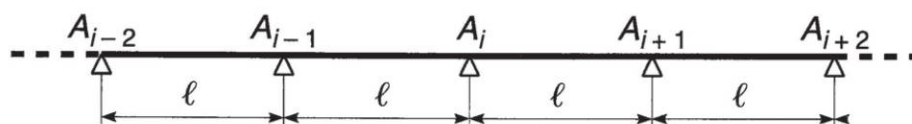


Figure 5.45

$$M_{\max} = \frac{p\ell^2}{12,9} + \frac{s\ell^2}{10,1} \quad \text{en travée de rive}$$

$$M_{\max} = \frac{p\ell^2}{29,7} + \frac{s\ell^2}{12,6} \quad \text{en 1}^{\text{re}} \text{ et dernière travée intermédiaires}$$

$$M_{\max} = \frac{p\ell^2}{24} + \frac{s\ell^2}{12} \quad \text{en travée intermédiaire}$$

$$M_{1\min} = -\frac{p\ell^2}{9,5} - \frac{s\ell^2}{8,4}$$

$$M_{2\min} = -\frac{p\ell^2}{12,9} - \frac{s\ell^2}{9,1}$$

$$M_{i\min} = -\frac{p\ell^2}{12} - \frac{s\ell^2}{8,8}$$

$$V_{0\max} = R_{0\max} = 0,3943p\ell + 0,4471s\ell$$

$$R_{1\max} = 1,1322p\ell + 1,2171s\ell$$

$$R_{i\max} = 1,000p\ell + 1,1830s\ell$$

$$V_{0\min} = 0,3943p\ell - 0,0530s\ell$$

$$V_{1w\max} = -0,6056p\ell + 0,0130s\ell$$

$$V_{1w\min} = -0,6056p\ell - 0,6200s\ell$$

$$V_{1e\max} = 0,5277p\ell + 0,5983s\ell$$

$$V_{1e\min} = 0,5277p\ell - 0,0720s\ell$$

$$V_{ie\max} = 0,500p\ell + 0,585s\ell$$

$$V_{ie\min} = 0,500p\ell - 0,085s\ell$$

5.2.5 Lignes d'influence relatives aux poutres à travées égales, de portée ℓ et de moment quadratique constant

■ Cas 1 : poutre à deux travées

Lignes d'influence des moments de flexion dans les sections situées à $0,4\ell$ de l'appui de gauche (courbe 2) et sur l'appui central (courbe 1).

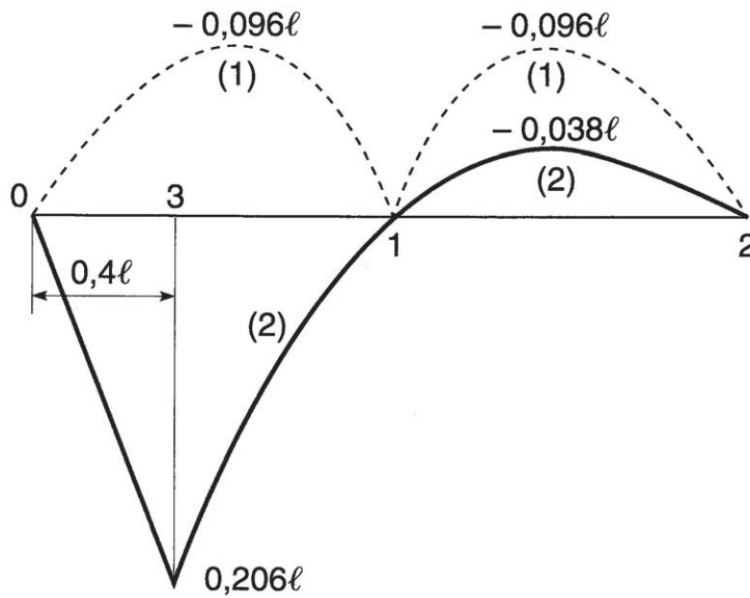


Figure 5.46

Lignes d'influence des efforts tranchants et des réactions d'appui.

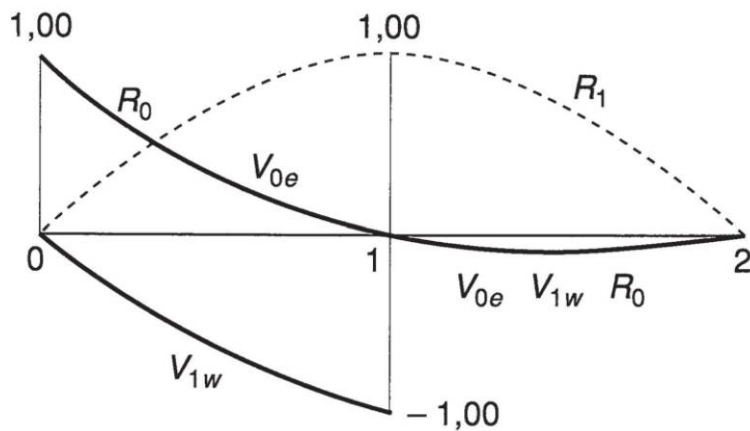


Figure 5.47

■ Cas 2 : poutre à trois travées

Lignes d'influence des moments de flexion dans les sections situées à $0,4l$ de l'appui de gauche (courbe 2), au milieu de la travée centrale (courbe 3) et sur appui intermédiaire (courbe 1).

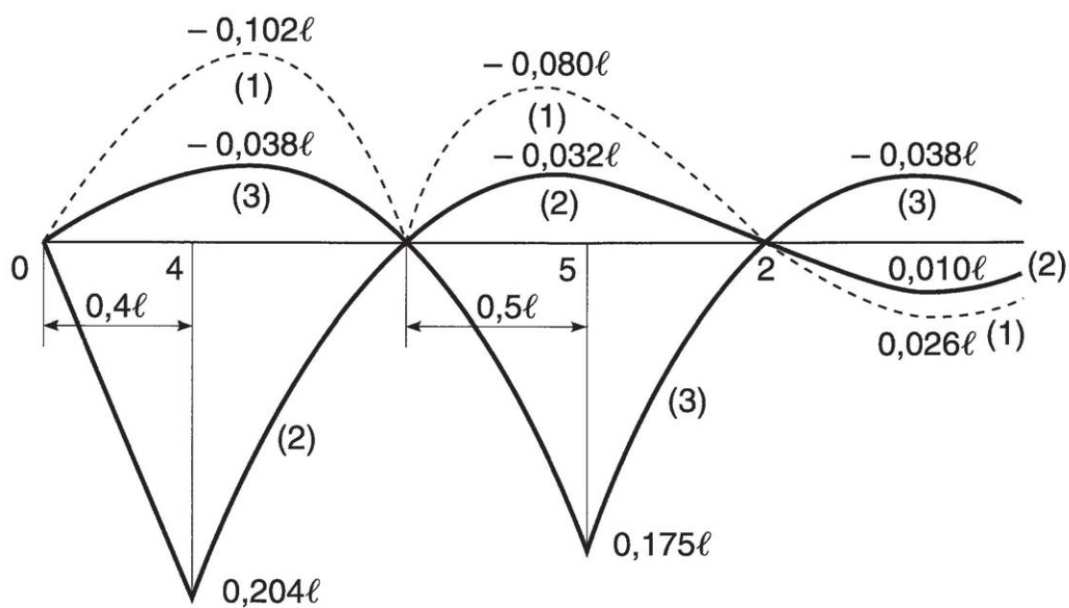


Figure 5.48

Lignes d'influence des efforts tranchants et des réactions d'appui.

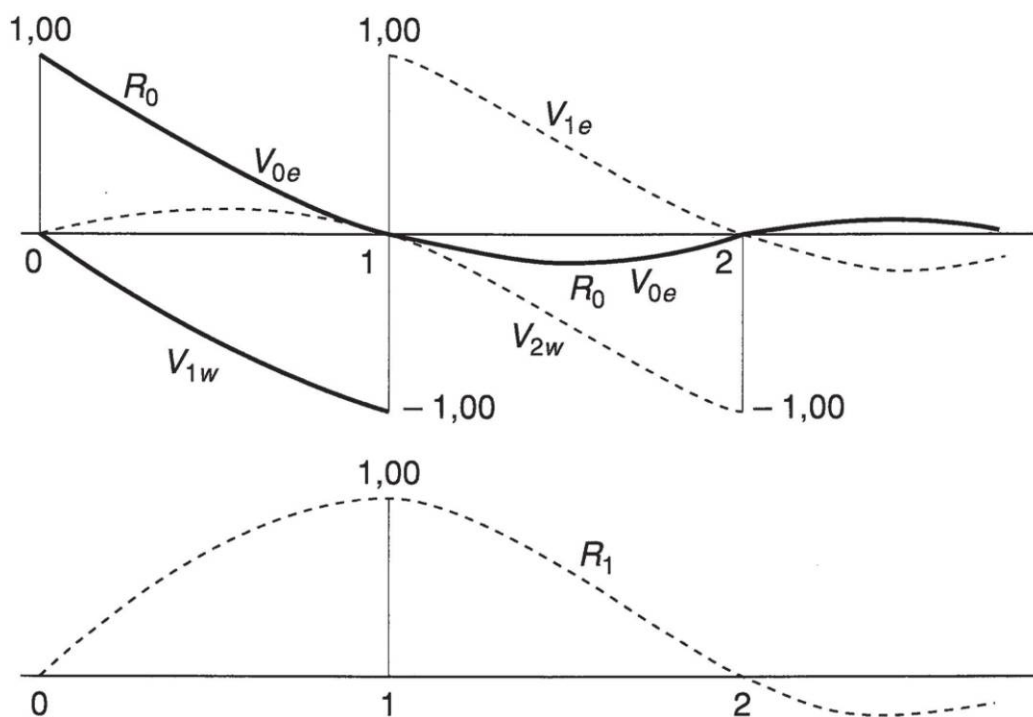


Figure 5.49

■ Cas 3 : poutre à quatre travées et plus

À défaut des lignes d'influence, nous donnons, pour son intérêt pratique, la table des valeurs des moments de flexion maximaux en travée et sur appuis pour une poutre continue comportant au moins quatre travées égales, chargée par un convoi constitué de deux charges égales P , distantes de a .

Dans cette table, la position du convoi est précisée par le rapport $\frac{x}{\ell}$, x étant la distance de la première charge à l'appui de gauche de la travée chargée.

La table donne également la valeur des réactions d'appui maximales R_0 et R_1 , sur les appuis A_0 et A_1 . Les valeurs des efforts tranchants maximaux, de part et d'autre des appuis intermédiaires sont un peu inférieures aux valeurs de R_1 .

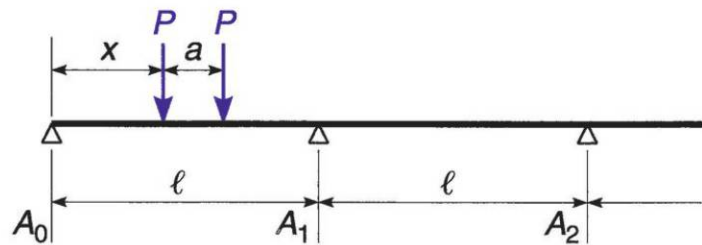


Figure 5.50

5

5.2.6 Poutre continue sur appuis élastiques ponctuels

■ Cas 1 : formule générale

Par hypothèse, les dénivellations sont proportionnelles aux réactions d'appui :

$$v_i = -k_i R_i \quad (5.22)$$

En désignant par R'_i les réactions qu'exerceraient les appuis A_i si la poutre était articulée au droit de chaque appui, on a :

$$R_i = R'_i + \frac{M_{i+1} - M_i}{\ell_{i+1}} + \frac{M_{i-1} - M_i}{\ell_i} \quad (5.23)$$

Tableau 5.1

a/ℓ	Moments minimaux sur appuis				Moments maximaux en travée				Réactions d'appui maximales	
	Appui A_1		Appui A_2		1 ^{re} travée		2 ^e travée		R_0	R_1
	x/ℓ	M_1	x/ℓ	M_2	x/ℓ	$M_{\max}$	x/ℓ	$M_{\max}$		
0,00	0,578	-0,206 Pl	0,616	-0,172 Pl	0,437	0,409 Pl	0,495	0,345 Pl	2,000 P	2,000 P
0,05	0,552	-0,206 —	0,590	-0,172 —	0,417	0,396 —	0,489	0,321 —	1,937 —	1,975 —
0,10	0,525	-0,204 —	0,563	-0,171 —	0,407	0,364 —	0,484	0,299 —	1,874 —	1,946 —
0,15	0,497	-0,201 —	0,534	-0,168 —	0,398	0,343 —	0,479	0,279 —	1,811 —	1,913 —
0,20	0,469	-0,197 —	0,504	-0,164 —	0,389	0,323 —	0,474	0,261 —	1,749 —	1,877 —
0,25	0,439	-0,192 —	0,472	-0,159 —	0,380	0,304 —	0,470	0,243 —	1,687 —	1,842 —
0,30	0,408	-0,186 —	0,438	-0,153 —	0,372	0,287 —	0,466	0,226 —	1,627 —	1,803 —
0,35	0,375	-0,179 —	0,402	-0,147 —	0,366	0,271 —	0,462	0,212 —	1,568 —	1,768 —
0,40	0,342	-0,170 —	0,365	-0,139 —	0,361	0,256 —	0,458	0,200 —	1,510 —	1,723 —
0,45	0,307	-0,161 —	0,773	-0,146 —	0,357	0,242 —	0,455	0,190 —	1,454 —	1,675 —
0,50	0,725	-0,160 —	0,748	-0,153 —	0,351	0,229 —	0,453	0,180 —	1,399 —	1,630 —
0,55	0,700	-0,167 —	0,723	-0,160 —	0,345	0,218 —	0,450	0,172 —	1,347 —	1,582 —
0,60	0,675	-0,172 —	0,698	-0,164 —	0,348	0,208 —	0,408	0,165 —	1,297 —	1,532 —
0,65	0,651	-0,176 —	0,674	-0,168 —	0,350	0,199 —	0,409	0,159 —	1,249 —	1,480 —
0,70	0,627	-0,180 —	0,648	-0,170 —	0,354	0,191 —	0,410	0,155 —	1,204 —	1,430 —
0,75	0,603	-0,181 —	0,623	-0,172 —	0,357	0,185 —	0,411	0,151 —	1,162 —	1,378 —
0,80	0,579	-0,182 —	0,598	-0,171 —	0,361	0,180 —	0,413	0,148 —	1,123 —	1,323 —
0,85	0,556	-0,181 —	0,574	-0,170 —	0,368	0,177 —	0,414	0,146 —	1,087 —	1,268 —
0,90	0,532	-0,180 —	0,549	-0,167 —	0,374	0,174 —	0,416	0,145 —	1,054 —	1,213 —
0,95	0,517	-0,178 —	0,524	-0,164 —	0,386	0,173 —	0,418	0,145 —	1,025 —	1,157 —
1,00	0,487	-0,174 —	0,499	-0,159 —	0,392	0,173 —	0,420	0,145 —	1,000 —	1,100 —

donc :

$$v_i = -k_i \left[R'_i + \frac{M_{i-1}}{\ell_i} - \left(\frac{1}{\ell_i} + \frac{1}{\ell_{i+1}} \right) M_i + \frac{M_{i+1}}{\ell_{i+1}} \right] \quad (5.24)$$

En portant les expressions de v_i dans l'équation des trois moments étendue au cas des appuis dénivelés :

$$\begin{aligned} & b_i M_{i-1} + (c_i + a_{i+1}) M_i + b_{i+1} M_{i+1} \\ &= \varphi_{ie} - \varphi_{iw} + \frac{v_{i+1} - v_i}{\ell_{i+1}} - \frac{v_i - v_{i-1}}{\ell_i} \end{aligned} \quad (5.25)$$

on obtient la relation des cinq moments :

$$\begin{aligned} & \frac{k_{i-1}}{\ell_{i-1}\ell_i} M_{i-2} + \left[b_i - \frac{k_{i-1}}{\ell_i} \left(\frac{1}{\ell_{i-1}} + \frac{1}{\ell_i} \right) - \frac{k_i}{\ell_i} \left(\frac{1}{\ell_i} + \frac{1}{\ell_{i+1}} \right) \right] M_{i-1} \\ &+ \left[c_i + a_{i+1} + \frac{k_{i-1}}{\ell_i^2} + k_i \left(\frac{1}{\ell_i} + \frac{1}{\ell_{i+1}} \right)^2 + \frac{k_{i+1}}{\ell_{i+1}^2} \right] M_i \\ &+ \left[b_{i+1} - \frac{k_i}{\ell_{i+1}} \left(\frac{1}{\ell_i} + \frac{1}{\ell_{i+1}} \right) - \frac{k_{i+1}}{\ell_{i+1}} \left(\frac{1}{\ell_{i+1}} + \frac{1}{\ell_{i+2}} \right) \right] M_{i+1} \\ &+ \frac{k_{i+1}}{\ell_{i+1}\ell_{i+2}} M_{i+2} \\ &= \varphi_{ie} - \varphi_{iw} - \frac{k_{i-1}}{\ell_i} R'_{i-1} + k_i \left(\frac{1}{\ell_i} + \frac{1}{\ell_{i+1}} \right) R'_i - \frac{k_{i+1}}{\ell_{i+1}} R_{i+1} \end{aligned} \quad (5.26)$$

On utilise cette formule notamment dans l'étude des systèmes de poutres croisées.

■ Cas 2 : Poutre infiniment rigide – cas général

La poutre est supposée appuyée sur n appuis élastiques de coordonnées x_i et y_i et dont la direction de la réaction d'appui est repérée par l'angle α_i .

L'ensemble des forces appliquées se réduit en O à P , Q et C (sens positifs sur la figure 5.51).

On désigne par k_i le coefficient de proportionnalité entre la réaction R_i et le déplacement parallèle à l'axe support de R_i .

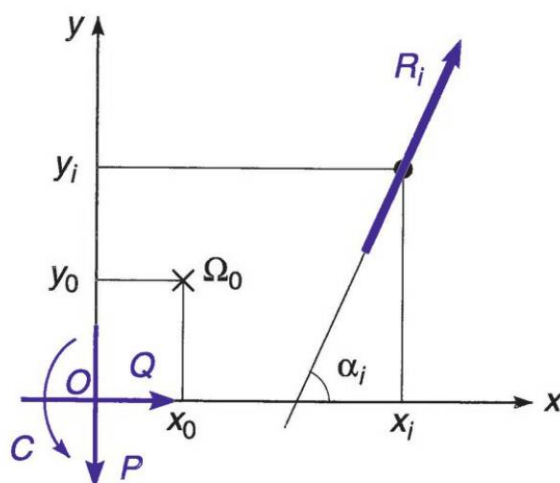


Figure 5.51

On pose :

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum k_i \sin^2 \alpha_i & a &= \sum k_i \sin \alpha_i (x_i \sin \alpha_i - y_i \cos \alpha_i) \\ \beta &= \sum k_i \sin \alpha_i \cos \alpha_i & b &= \sum k_i \cos \alpha_i (x_i \sin \alpha_i - y_i \cos \alpha_i) \\ \gamma &= \sum k_i \cos^2 \alpha_i & c &= \sum k_i (x_i \sin \alpha_i - y_i \cos \alpha_i) \end{aligned}$$

Le centre de torsion Ω_0 a pour coordonnées :

$$x_0 = \frac{a\gamma - b\beta}{\alpha\gamma - \beta^2} \quad y_0 = \frac{a\beta - b\alpha}{\alpha\gamma - \beta^2}$$

Le système d'axes $\Omega_0 XY$ est substitué au système Oxy :

$$X_i = x_i - x_0 \quad Y_i = y_i - y_0 \quad C_0 = C - Qy_0 - Px_0$$

On pose :

$$\Gamma = \sum k_i (X_i \sin \alpha_i - Y_i \cos \alpha_i)$$

La réaction sur chaque appui est :

$$R_i = \frac{Qk_i}{\alpha\gamma - \beta^2} (\beta \sin \alpha_i - \alpha \cos \alpha_i) + \frac{Pk_i}{\alpha\gamma - \beta^2} (\gamma \sin \alpha_i - \beta \cos \alpha_i) - \frac{C_0 k_i}{\Gamma} (X_i \sin \alpha_i - Y_i \cos \alpha_i)$$

■ **Cas 3 : Poutre infiniment rigide – cas où $\alpha_i = 90^\circ$**

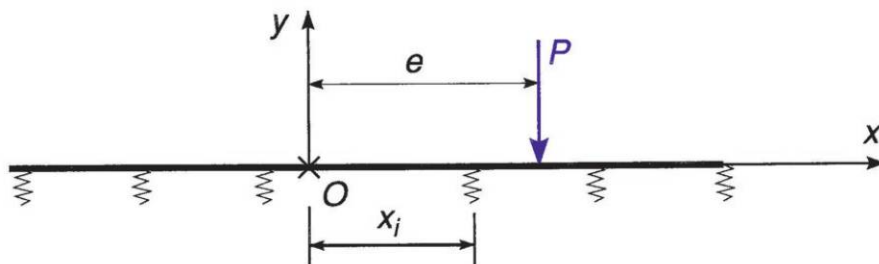


Figure 5.52

L'application de l'équation des cinq moments à la poutre dite infiniment rigide mettrait en évidence des déplacements v_i (en conséquence des réactions R_i), fonctions linéaires des abscisses x . Soit :

$$R_i = \frac{Pk_i}{\sum k_i} \left(1 + \frac{e \sum k_i}{\sum x_i^2 k_i} x_i \right) \quad (5.27)$$

en supposant l'origine O choisie de sorte que $\sum x_i k_i = 0$ et en désignant par P la résultante de l'ensemble des charges appliquées et par e sa position.

Les sollicitations en chaque point sont obtenues en considérant le système des forces de gauche (ou de droite).

■ **Cas 4 : Poutre infiniment rigide circulaire appuyée le long de sa périphérie sur n appuis élastiques uniformément distribués et identiques**

L'ensemble des forces et couples appliquées se réduit en O à P et C (sens positifs sur la figure).

$$R_i = \frac{P \sin \alpha_i}{\sum \sin^2 \alpha_i} - \frac{C}{nr}$$

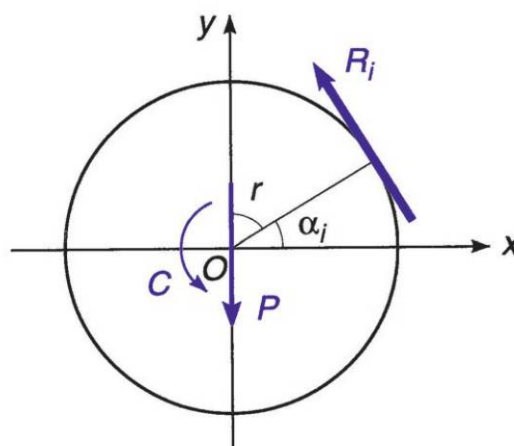


Figure 5.53

5.3 Systèmes de poutres croisées

Principe

Les systèmes de poutres croisées sont calculés par l'une des méthodes suivantes :

- la méthode directe, c'est-à-dire l'écriture de l'égalité des déplacements verticaux aux points de croisement des poutres, sous l'action des charges appliquées ;
- la résolution de l'équation des cinq moments (5.26) ;
- les outils informatiques appliqués sur des modèles faisant intervenir les liaisons à chaque croisement des poutres avec prise en compte des déformations de flexion, de torsion et d'effort tranchant.

Cas particulier des poutres de même moment quadratique

En supposant toutes les poutres simplement appuyées, de même moment quadratique, ayant une raideur de torsion tenue pour négligeable et soumises à un chargement P à chaque intersection, l'application des méthodes précédentes conduit à des résultats simples dans les cas suivants.

Cas 1

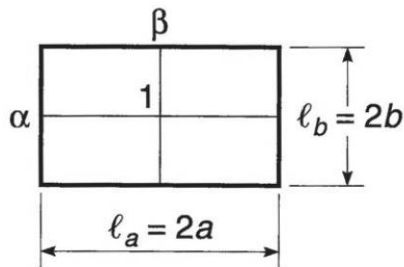


Figure 5.54

$$\text{Poutre } \alpha \left\{ \begin{array}{l} M_1 = \frac{b^3}{4(a^3 + b^3)} P \ell_a \\ V = \frac{b^3}{2(a^3 + b^3)} P \end{array} \right.$$

$$\text{Poutre } \beta \left\{ \begin{array}{l} M_1 = \frac{a^3}{4(a^3 + b^3)} P \ell_b \\ V = \frac{a^3}{2(a^3 + b^3)} P \end{array} \right.$$

Cas 2

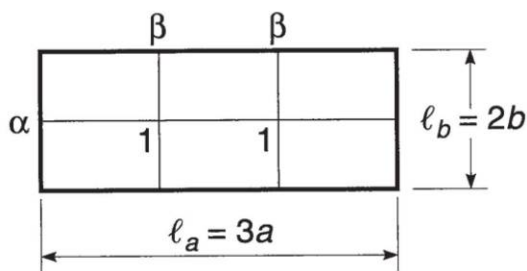


Figure 5.55

$$\text{Poutre } \alpha \left\{ \begin{array}{l} M_1 = \frac{b^3}{3(5a^3 + b^3)} P \ell_a \\ V = \frac{b^3}{5a^3 + b^3} P \end{array} \right.$$

$$\text{Poutre } \beta \left\{ \begin{array}{l} M_1 = \frac{5a^3}{4(5a^3 + b^3)} P \ell_b \\ V = \frac{5a^3}{2(5a^3 + b^3)} P \end{array} \right.$$

Cas 3

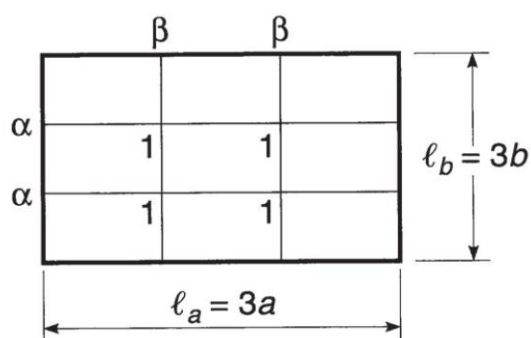


Figure 5.56

$$\text{Poutre } \alpha \left\{ \begin{array}{l} M_1 = \frac{b^3}{3(a^3 + b^3)} P \ell_a \\ V = \frac{b^3}{a^3 + b^3} P \end{array} \right.$$

$$\text{Poutre } \beta \left\{ \begin{array}{l} M_1 = \frac{a^3}{3(a^3 + b^3)} P \ell_b \\ V = \frac{a^3}{a^3 + b^3} P \end{array} \right.$$

Cas particulier des poutres infiniment rigides dans une direction

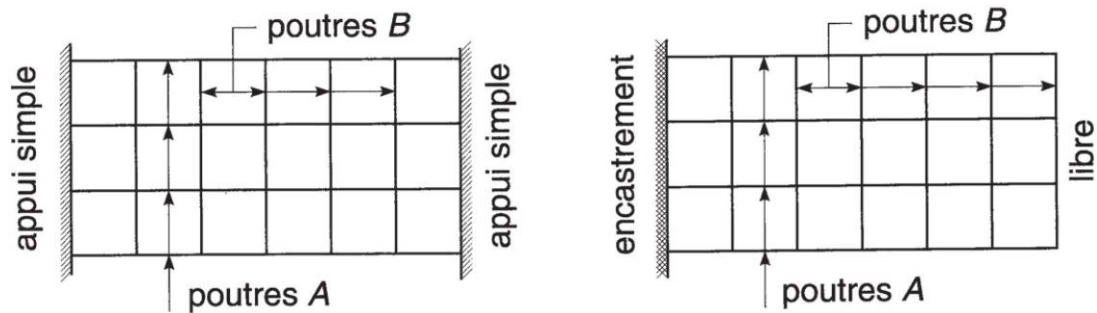


Figure 5.57

Envisageons le cas particulier des systèmes représentés sur la figure 5.57. Les poutres B sont supposées infiniment rigides (cela peut être admis si la longueur ℓ_b est inférieure à deux fois la longueur ℓ_a et si la hauteur des poutres B est sensiblement égale ou supérieure à celle des poutres A).

Alors une poutre B peut être assimilée à une poutre infiniment rigide appuyée sur des appuis élastiques ponctuels : la formule (5.27) est applicable pour la détermination des réactions R_i . Dans la mesure où les poutres A suivent la même loi de variation des moments quadratiques, on peut substituer aux coefficients k_i , les moments quadratiques I_i des poutres A ; soit :

$$R_i = \frac{PI_i}{\sum I_i} \left[1 + \frac{e \sum I_i}{\sum x_i^2 I_i} x_i \right] \quad (5.28)$$

(Cf. le cas 2 du paragraphe 5.2.6. pour les notations.)

Remarque

L'étude d'un tablier de pont sous charges peut être assimilée au cas a de la figure 5.57 (poutres A = longerons ; poutres B = entretoises).
L'étude de contreventement d'un bâtiment peut être assimilée au cas b de la figure 5.57 (poutres A = refends ; poutres B = planchers).

5.4 Poutres sur appui élastique continu

5.4.1 Paramètres caractéristiques

On considère une poutre à moment quadratique constant, reposant sur un appui continu de largeur b constitué par un sol élastique.

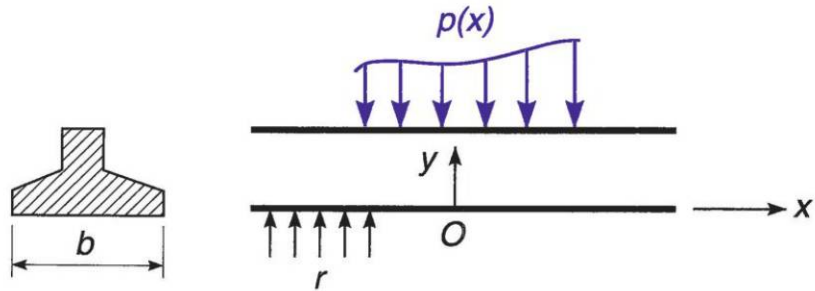


Figure 5.58

Si y désigne la flèche de la poutre au point d'abscisse x , la réaction du sol en ce point est équivalente à une densité de charge :

$$r = -kby \quad (5.29)$$

b est la largeur d'appui, supposée constante ;

k est une constante caractéristique du sol, appelée **module de réaction** : rapport de la contrainte verticale à l'enfoncement correspondant.

Si $p(x)$ est la densité de charge appliquée à la poutre, la flèche y doit satisfaire l'équation différentielle :

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + kby + p(x) = 0 \quad (5.30)$$

L'intégration de cette équation conduit à poser :

$$\gamma = \sqrt[4]{\frac{kb}{4EI}} = \frac{1}{\ell_e} \quad (5.31)$$

La longueur ℓ_e et appelée *longueur élastique* de la poutre.

On obtient successivement :

$$\left. \begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} \\ M &= EI \frac{dy^2}{dx^2} \\ V &= \frac{dM}{dx} \end{aligned} \right\} \quad (5.32)$$

Les expressions de y , y' , M et V font intervenir des fonctions $W(x)$, $X(x)$, $Y(x)$ et $Z(x)$ définies sur les figures 5.59 à 5.62.

- Fonction $W(x) = -e^{-\gamma x}(\cos \gamma x + \sin \gamma x)$ pour $x > 0$
 $= -e^{\gamma x}(\cos \gamma x - \sin \gamma x)$ pour $x < 0$

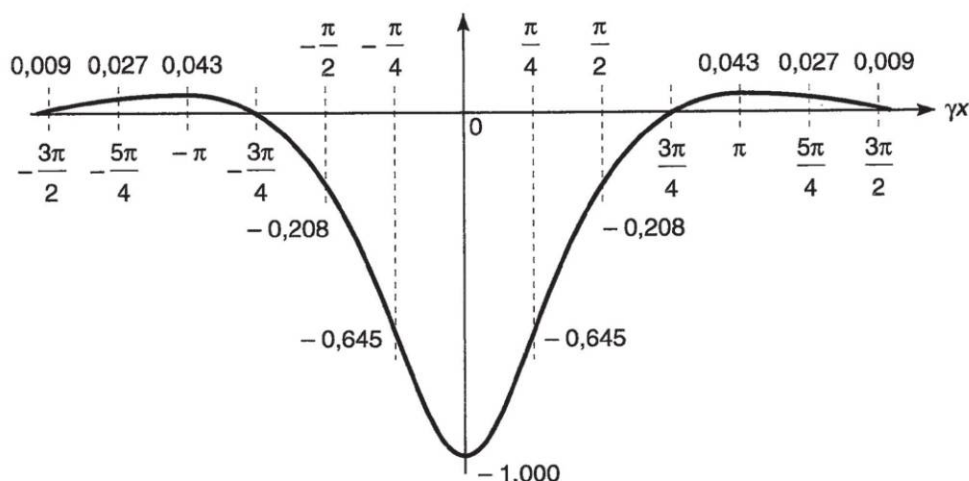


Figure 5.59

- Fonction $X(x) = e^{-\gamma x} \sin \gamma x$ pour $x > 0$
 $= e^{\gamma x} \sin \gamma x$ pour $x < 0$

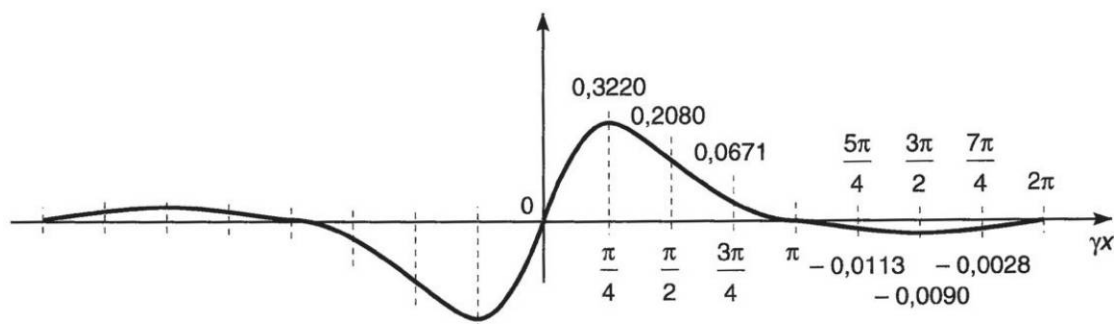


Figure 5.60

- Fonction $Y(x) = e^{-\gamma x}(\cos \gamma x - \sin \gamma x)$ pour $x > 0$
 $= e^{\gamma x}(\cos \gamma x + \sin \gamma x)$ pour $x < 0$

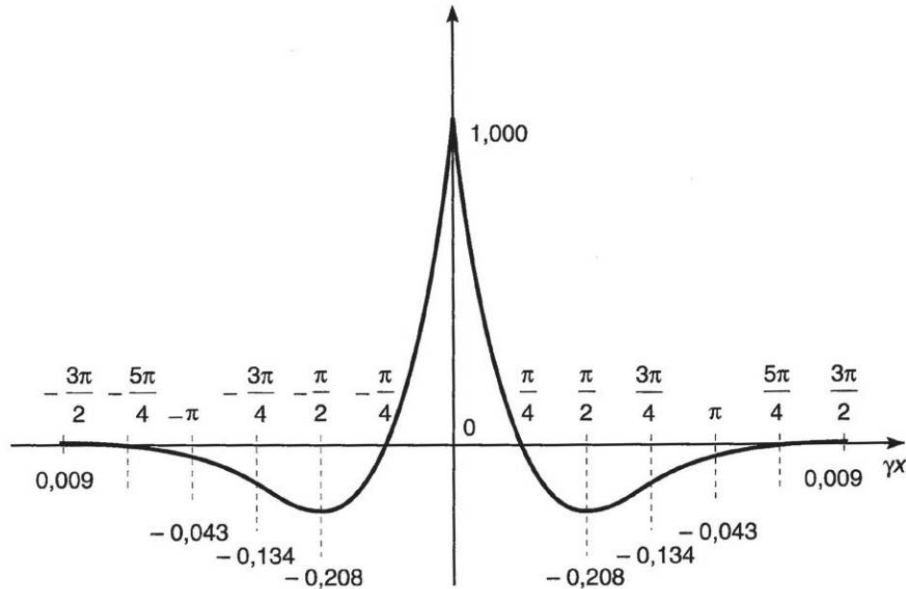


Figure 5.61

- Fonction $Z(x) = -e^{-\gamma x} \cos \gamma x$ pour $x > 0$
 $= e^{\gamma x} \cos \gamma x$ pour $x < 0$

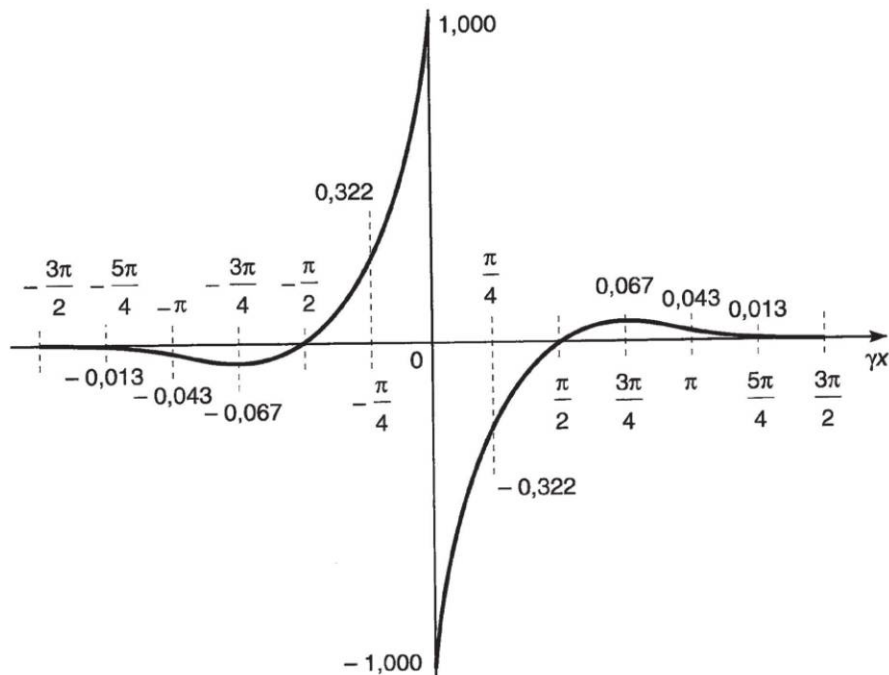


Figure 5.62

5.4.2 Formulaire de la poutre infinie

■ Cas 1

$$y' = \frac{P\gamma^2}{kb} X(x) \quad y = \frac{P\gamma}{2kb} W(x)$$

$$M = \frac{P}{4\gamma} Y(x) \quad V = \frac{P}{2} Z(x)$$

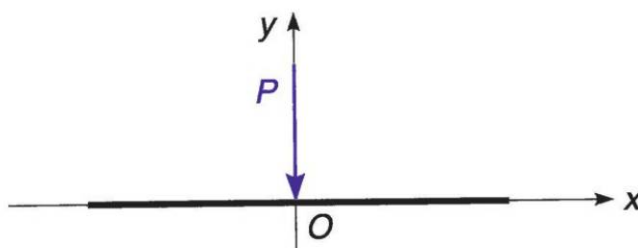


Figure 5.63

■ Cas 2

$$y' = \frac{C\gamma^3}{kb} Y(x) \quad y = \frac{C\gamma^2}{2kb} X(x)$$

$$M = \frac{C}{2} Z(x) \quad V = -\frac{C\gamma}{2} W(x)$$

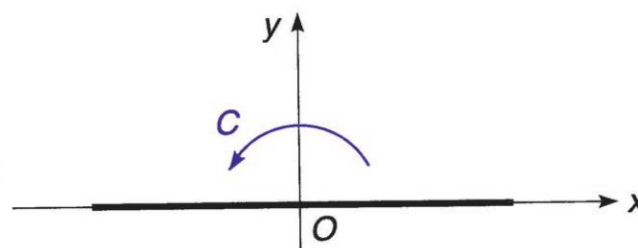


Figure 5.64

■ Cas 3

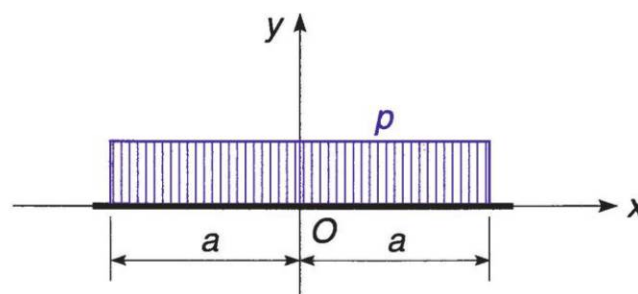


Figure 5.65

$$0 < x < a$$

$$x > a$$

$$y' = \frac{p\gamma}{2kb} [W(a+x) - W(a-x)]$$

$$y' = \frac{p\gamma}{2kb} [W(x+a) - W(x-a)]$$

$$y = -\frac{p}{2kb} [2 + Z(a-x) + Z(a+x)] \quad y = -\frac{p}{2kb} [Z(x+a) - Z(x-a)]$$

$$M = -\frac{p}{4\gamma^2} [X(a+x) + X(a-x)] \quad M = \frac{p}{4\gamma^2} [X(x+a) - X(x-a)]$$

$$V = -\frac{p}{4\gamma} [Y(a-x) - Y(a+x)] \quad V = -\frac{p}{4\gamma} [Y(x-a) - Y(x+a)]$$

■ Cas 4

$$y'(0) = -\frac{p}{2kba} [1 + \gamma a W(a) + Z(a)]$$

$$y(a) = -\frac{p}{2kba} [1 - \gamma a + Z(a)]$$

$$y(0) = \frac{p}{4kb\gamma a} [1 - Y(a) + 2\gamma a Z(a)]$$

$$y(a) = -\frac{p}{4kb\gamma a} [2\gamma a - 1 + Y(a)]$$

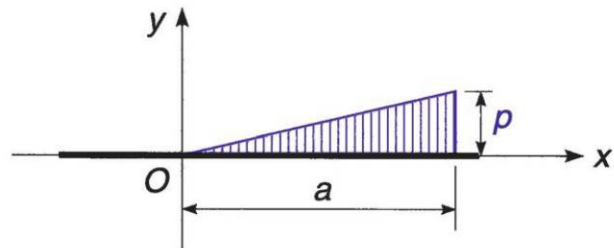


Figure 5.66

$$0 < x < a$$

$$M = \frac{p}{8\gamma^3 a} [W(x) - W(a-x) + 2\gamma a X(a-x)]$$

$$V = \frac{p}{4\gamma^2 a} [X(a-x) + X(x) - \gamma a Y(a-x)]$$

$$x > a$$

$$M = \frac{p}{8\gamma^3 a} [W(x) - W(x-a) - 2\gamma a X(x-a)]$$

$$V = \frac{p}{4\gamma^2 a} [X(x) - X(x-a) - \gamma a Y(x-a)]$$

5.4.3 Formulaire de la poutre demi-infinie

Les déformations et sollicitations de la poutre demi-infinie sont calculées à partir des résultats obtenus pour la poutre infinie par application de la **méthode d'Hétényi**.

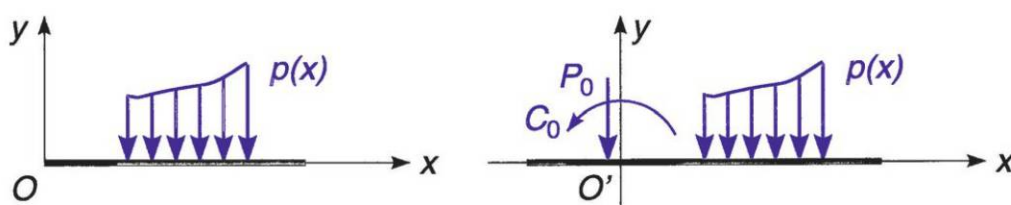


Figure 5.67

En un point O' immédiatement à gauche de O , sont appliqués une force P_0 et un couple C_0 de façon que sous l'ensemble du chargement M et V soient nuls en O' .

On établit :

$$P_0 = 4(\gamma M_0 + V_0) \quad C_0 = \frac{2}{\gamma}(2\gamma M_0 + V_0) \quad (5.33)$$

M_0 et V_0 sont le moment de flexion et l'effort tranchant sous $p(x)$ dans la poutre infinie au droit de O' .

Désignons par y'_1 , y_1 , M_1 et V_1 les déplacements et sollicitations sous $p(x)$ dans une section d'abscisse x de la poutre infinie ; dans la poutre demi-infinie, on obtient

$$\left. \begin{aligned} y' &= y'_1 + \frac{P_0 \gamma^2}{kb} X(x) + \frac{C_0 \gamma^3}{kb} Y(x) \\ y &= y_1 + \frac{P_0 \gamma}{2kb} W(x) + \frac{C_0 \gamma^2}{kb} X(x) \\ M &= M_1 + \frac{P_0}{4\gamma} Y(x) + \frac{C_0}{2} Z(x) \\ V &= V_1 + \frac{P_0}{2} Z(x) - \frac{C_0 \gamma}{2} W(x) \end{aligned} \right\} \quad (5.34)$$

■ Cas 1 : charge concentrée

Chargement auxiliaire en O

$$P_0 = P[Y(c) - 2Z(c)]$$

$$C_0 = \frac{P}{\gamma}[Y(c) - Z(c)]$$

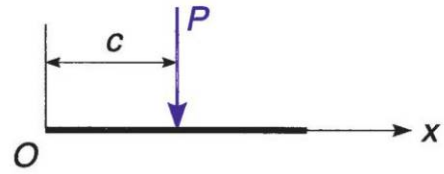


Figure 5.68

Cas particulier $c = 0$

$$y' = \frac{2P\gamma^2}{kb}W(x)$$

$$y = \frac{2P\gamma}{kb}Z(x)$$

$$M = -\frac{P}{\gamma}X(x)$$

$$V = -PY(x)$$

$$y'(0) = \frac{2P\gamma^2}{kb}$$

$$y(0) = -\frac{2P\gamma}{kb}$$

$$M(0) = 0$$

$$V(0) = -P$$

■ Cas 2 : couple

Chargement auxiliaire en O

$$P_0 = -2C\gamma[Z(c) + W(c)]$$

$$C_0 = -C[2Z(c) + W(c)]$$

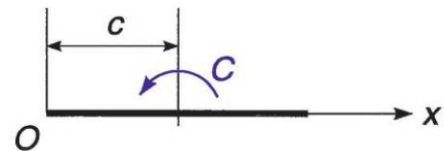


Figure 5.69

Cas particulier $c = 0$

$$y' = -\frac{4C\gamma^3}{kb}Z(x)$$

$$y = -\frac{4C\gamma^2}{kb}Y(x)$$

$$M = CW(x)$$

$$V = 2C\gamma X(x)$$

$$y'(0) = \frac{4C\gamma^3}{kb}$$

$$y(0) = -\frac{2C\gamma^2}{kb}$$

$$M(0) = -C$$

$$V(0) = 0$$

■ Cas 3 : charge uniformément répartie

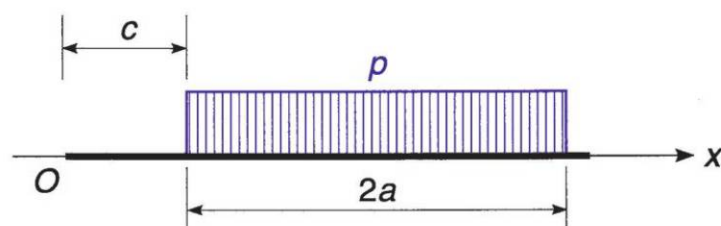


Figure 5.70

Chargement auxiliaire en O :

$$P_0 = \frac{p}{\gamma} [X(2a + c) - X(c) - Y(2a + c) + Y(c)]$$

$$C_0 = \frac{p}{2\gamma^2} [2X(2a + c) - 2X(c) - Y(2a + c) + Y(c)]$$

Cas particulier de la charge uniformément répartie sur une longueur infinie à partir de l'abscisse C.

On applique les formules (5.34) avec :

$$P_0 = \frac{p}{\gamma} [Y(c) - X(c)] \quad C_0 = \frac{p}{2\gamma^2} [Y(c) - 2X(c)]$$

$$M(x) = \frac{p}{4\gamma^2} X(x - c) + \frac{P_0}{4\gamma} Y(x) + \frac{C_0}{2} Z(x)$$

$$V(x) = \frac{p}{4\gamma} Y(x - c) + \frac{P_0}{2} Z(x) - \frac{C_0 \gamma}{2} W(x)$$

$$y'(0) = -\frac{p\gamma}{2kb} [2X(c) - W(c) - Y(c)]$$

$$y(0) = -\frac{p}{2kb} [Y(c) - X(c) - Z(c)]$$

$$y'(c) = -\frac{p\gamma}{2kb} [1 - 2(Y(c) - X(c))X(c) - (Y(c) - 2X(c))Y(c)]$$

Cas particulier $c = 0$

$$M = 0 \quad V = 0 \quad y' = 0 \quad y = -\frac{p}{kb}$$

■ Cas 4 : charge triangulaire

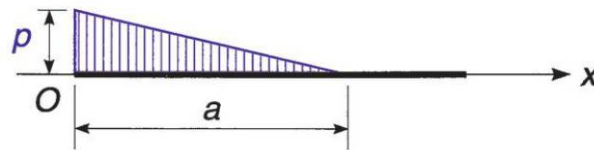


Figure 5.71

Chargement auxiliaire en O :

$$P_0 = \frac{p}{2\gamma^2 a} [W(a) - 2X(a) + 1 + 2\gamma a]$$

$$C_0 = \frac{p}{2\gamma^3 a} [W(a) - X(a) + 1 + \gamma a]$$

■ Cas 5 : poutre demi-infinie articulée à l'origine

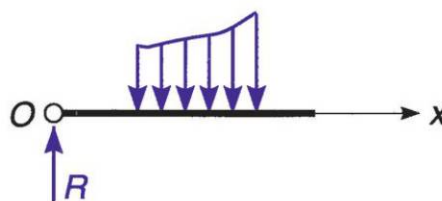


Figure 5.72

La réaction R s'écrit :

$$R = -\frac{kby_1(0)}{2\gamma} \quad (5.35)$$

$y_1(0)$ est le déplacement vertical du point O de la poutre supposée non articulée sous l'effet du chargement appliqué.

Désignons par y'_1 , y_1 , M_1 et V_1 les déplacements et les sollicitations sous l'effet du chargement appliqué, dans une section d'abscisse x de la poutre demi-infinie ; dans la poutre articulée, on obtient

$$\left. \begin{aligned} y' &= y'_1 + \frac{2R\gamma^2}{kb} W(x) \\ y &= y_1 - \frac{2R\gamma}{kb} Z(x) \\ M &= M_1 + \frac{R}{\gamma} X(x) \\ V &= V_1 + RY(x) \end{aligned} \right\} \quad (5.36)$$

■ **Cas 6 : Poutre demi infinie articulée à l'origine avec une dénivelée**

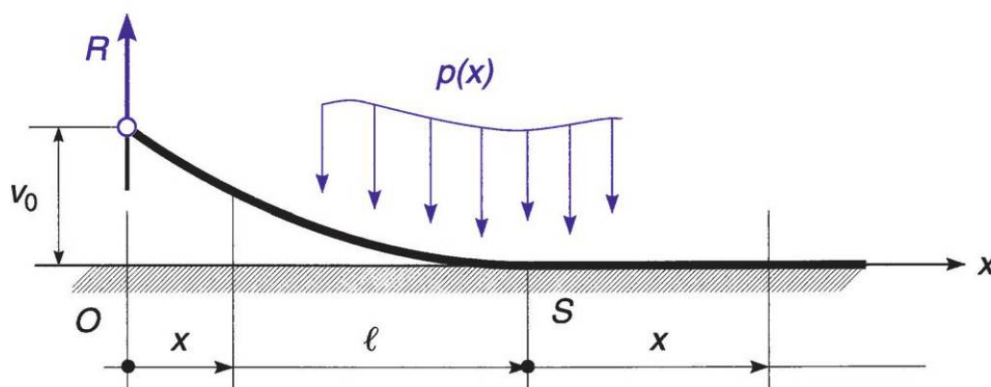


Figure 5.73

La figure d'équilibre est la juxtaposition de deux tronçons :

- le tronçon OS de longueur l isolé du sol ;
- le tronçon Sx en contact avec le sol.

Sur premier tronçon ($0 < x < l$)

$$M = Rx - \int_0^x p(x)(\ell - x)dx \quad V = R - \int_0^x p(x)dx$$

Sur deuxième tronçon ($0 < x$)

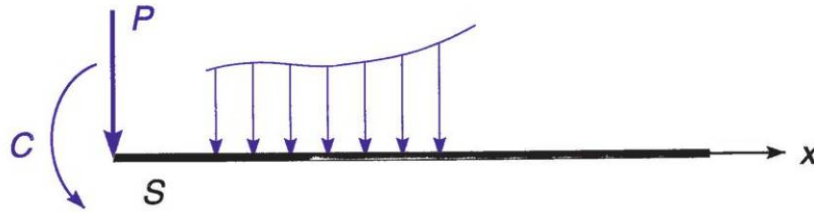


Figure 5.74

P et C désignent les forces de liaison entre les deux tronçons ; M et V sont données par les formules (5.34).

L'obtention des valeurs de R et l sont ainsi obtenues.

- détermination des forces de liaison à l'extrémité S du premier tronçon :

$$M = R\ell - \int_0^\ell p(x)((\ell - x)dx) = -C(R, \ell)$$

$$V = R - \int_0^\ell p(x)dx = -P(R, \ell)$$

- détermination des déformations à l'extrémité S du premier tronçon (équation de Bresse, formules (3.15) et (3.16)) :

$$v = 0 = v_0 + \varphi_0 \ell + \int_0^\ell \frac{M(\ell - x)}{EI} dx \rightarrow \varphi_0(R, \ell)$$

$$\varphi(R, \ell) = \varphi_0 + \int_0^\ell \frac{M}{EI} dx$$

- détermination des déformations à l'extrémité S du deuxième tronçon (formule 5.34) :

$$\begin{aligned} y = v = 0 & \rightarrow R(\ell) \\ y' = \varphi(R, \ell) & \rightarrow \ell \quad \text{d'où } R \end{aligned}$$

■ Application au cas de la charge uniformément répartie p

$$\ell = \frac{1}{\gamma} \left(\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2\mu}}} - \frac{\mu}{2} - \sqrt{\frac{\mu}{2}} - 1 \right)$$

en posant :

γ (voir formule (5.31))

$$\mu = \sqrt[3]{\frac{1}{4}(1 + \sqrt{A})} + \sqrt[3]{\frac{1}{4}(1 - \sqrt{A})}$$

avec :

$$A = 1 + 16 \left(\frac{2kbv_0}{p} + 1 \right)^3$$

$$R = p \frac{1 + \gamma\ell}{2\gamma}$$

Sur le premier tronçon OS :

$$M = Rx - \frac{px^2}{2} \quad V = R - px$$

Sur le deuxième tronçon Sx :

$$M = -\frac{P}{\gamma}X(x) + CW(x) \quad V = -PY(x) + 2C\gamma X(x)$$

avec :

$$P = p\ell - R \quad \text{et} \quad C = \frac{p\ell^2}{2} - R\ell$$

Remarque

L'étude d'une dalle de transition de pont peut s'assimiler au cas ci-dessus.

5.4.4 Formulaire de la poutre de longueur finie

Pour étudier une poutre de longueur finie AB soumise à un système de charges déterminé, il suffit de superposer les efforts dans la poutre infinie, résultant des deux cas suivants :

- Poutre infinie soumise aux mêmes charges que la poutre finie AB : déterminer V_A et M_A dans la section A et V_B et M_B dans la section B .

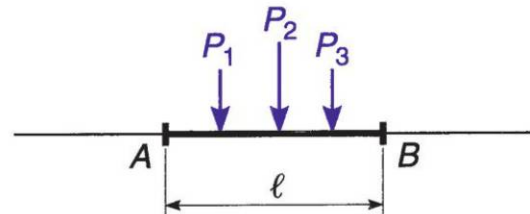


Figure 5.75

- Poutre infinie soumise en A à P_A et C_A , et en B à P_B et C_B .

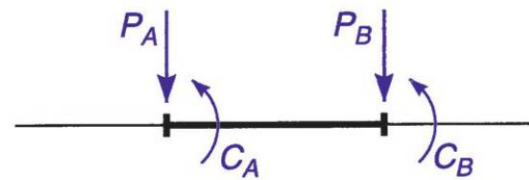


Figure 5.76

La superposition des efforts obtenus dans les deux cas doit rendre nuls les efforts tranchants et les moments de flexion en A et B .

On tire de ces conditions quatre équations permettant de déterminer les inconnues P_A , C_A , P_B , C_B .

$$\left. \begin{aligned} P_A + P_B Z(\ell) - C_A \gamma + C_B \gamma W(\ell) - 2V_A &= 0 \\ P_A Z(\ell) + P_B - C_A \gamma W(\ell) + C_B \gamma + 2V_B &= 0 \\ P_A + P_B Y(\ell) - 2C_A \gamma - 2C_B \gamma Z(\ell) + 4\gamma M_A &= 0 \\ P_A Y(\ell) + P_B + 2C_A \gamma Z(\ell) + 2C_B \gamma + 4\gamma M_B &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.37)$$

Désignons par y'_1 , y_1 , M_1 et V_1 les déplacements et sollicitations dans une section d'abscisse x (mesurée à partir de A) de la poutre infinie soumise aux mêmes charges que la poutre finie AB ; dans la poutre de longueur finie, on obtient :

$$\left. \begin{aligned} y' &= y'_1 + \frac{P_A \gamma^2}{kb} X(x) + \frac{C_A \gamma^3}{kb} Y(x) - \frac{P_B \gamma^2}{kb} X(\ell - x) + \frac{C_B \gamma^3}{kb} Y(\ell - x) \\ y &= y_1 + \frac{P_A \gamma}{2kb} W(x) + \frac{C_A \gamma}{kb} X(x) + \frac{P_B \gamma}{2kb} W(\ell - x) - \frac{C_B \gamma^2}{kb} X(\ell - x) \\ M &= M_1 + \frac{P_A}{4\gamma} Y(x) + \frac{C_A}{2} Z(x) + \frac{P_B}{4\gamma} Y(\ell - x) - \frac{C_B}{2} Z(\ell - x) \\ V &= V_1 + Z(x) - \frac{C_A \gamma}{2} W(x) - \frac{P_B}{2} Z(\ell - x) - \frac{C_B \gamma}{2} W(\ell - x) \end{aligned} \right\} \quad (5.38)$$

Remarques

- La théorie n'est rigoureusement applicable, dans le cas de la poutre reposant sur le sol, que si la poutre est soumise sur toute son étendue à une réaction du sol ascendante.
- Lorsque la longueur de la poutre est telle que $\ell < \frac{\pi}{2} \ell_e$ (ℓ_e : longueur élastique), il n'y a pas lieu de tenir compte de la déformation du sol ; la poutre peut être calculée comme si elle était infiniment raide.
- Lorsque la longueur de la poutre est telle que $\gamma \ell > 5$, on peut considérer les couples (P_A, C_A) et (P_B, C_B) indépendants l'un de l'autre. Chacun des couples (P, C) peut être alors déterminé en supposant la poutre demi-infinie.

Cas particulier : chargement symétrique

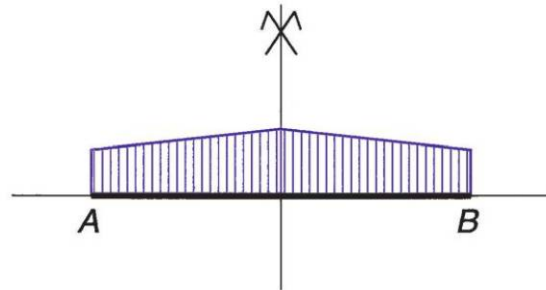


Figure 5.77

La symétrie entraîne :

$$V_B = -V_A \quad M_B = M_A \quad P_B = P_A \quad C_B = -C_A$$

$$\left. \begin{aligned} P_A[1 + Z(\ell)] - C_A\gamma[1 + W(\ell)] - 2V_A &= 0 \\ P_A[1 + Y(\ell)] - 2C_A\gamma[1 - Z(\ell)] + 4\gamma M_A &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.39)$$

$$\left. \begin{aligned} y' &= y'_1 + \frac{P_A\gamma^2}{kb}[X(x) - X(\ell - x)] + \frac{C_A\gamma^3}{kb}[Y(x) - Y(\ell - x)] \\ y &= y_1 + \frac{P_A\gamma}{2kb}[W(x) + W(\ell - x)] + \frac{C_A\gamma^2}{kb}[X(x) + X(\ell - x)] \\ M &= M_1 + \frac{P_A}{4\gamma}[Y(x) + Y(\ell - x)] + \frac{C_A}{2}[Z(x) - Z(\ell - x)] \\ V &= V_1 + \frac{P_A}{2}[Z(x) - Z(\ell - x)] - \frac{C_A\gamma}{2}[W(x) - W(\ell - x)] \end{aligned} \right\} \quad (5.40)$$

5.5 Poutre courbe

5.5.1 Formules générales

Appelons r le rayon d'un anneau supportant une densité de charge p et des densités de couple C_x et C_y .

Dans une section d'abscisse curviligne s , les sollicitations M , V et T sont reliées par les relations suivantes :

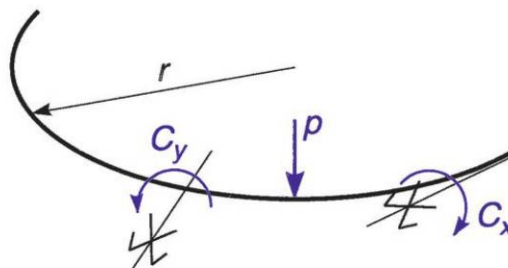


Figure 5.78

$$\frac{dV}{ds} = -p \quad \frac{dT}{ds} = C_x - \frac{M}{r} \quad \frac{dM}{ds} = -C_y - \frac{T}{r} + V \quad (5.41)$$

5.5.2 Poutre circulaire encastrée

Hypothèses de la poutre circulaire encastrée

On considère la poutre circulaire AB chargée normalement à son plan ; la poutre est supposée encastrée à ses extrémités, pour résister à la flexion et à la torsion.

Les formules qui suivent donnent une bonne approche des valeurs des sollicitations sous réserve que

$$1 < \frac{EI}{GJ} < 3.$$

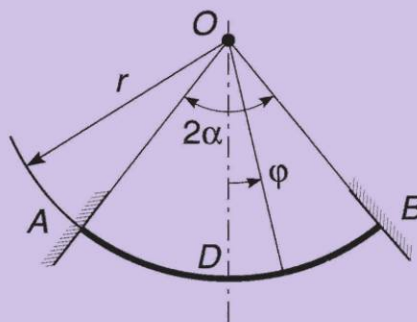


Figure 5.79

■ **Cas 1 : charge uniformément répartie (p) par unité de longueur de la poutre**

$$M_D = \left(\frac{2 \sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{\alpha} - 1 \right) pr^2 = k_1 pr^2$$

Dans une section quelconque repérée par l'angle φ

$$\left. \begin{aligned} V &= -pr\varphi \\ M &= M_D \cos \varphi - pr^2(1 - \cos \varphi) \\ T &= M_D \sin \varphi - pr^2(\varphi - \sin \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (5.42)$$

Pour $\varphi = -\alpha \quad M_A = k_2 pr^2 \quad T_A = k_3 pr^2$

Tableau 5.2

α	$k_1 = \frac{M_D}{pr^2}$	$k_2 = \frac{M_A}{pr^2}$	$k_3 = \frac{T_A}{pr^2}$
90	0,2732	- 1,0000	0,2976
80	0,2370	- 0,7852	0,1781
70	0,1963	- 0,5909	0,0976
60	0,1540	- 0,4230	0,0478
50	0,1129	- 0,2847	0,0202
45	0,0935	- 0,2268	0,0122
40	0,0754	- 0,1762	0,0069
30	0,0438	- 0,0960	0,0017
20	0,0199	- 0,0416	0,0002
10	0,0051	- 0,0102	0,0000

■ Cas 2 : charge concentrée (P) au milieu de la portée

$$M_D = \frac{1 - \cos \alpha}{2\alpha} Pr = k_1 Pr \quad (5.43)$$

Dans une section quelconque repérée par l'angle $\varphi > 0$

$$\left. \begin{aligned} V &= -\frac{P}{2} \\ M &= M_D \cos \varphi - \frac{Pr}{2} \sin \varphi \\ T &= M_D \sin \varphi - \frac{Pr}{2} (1 - \cos \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (5.44)$$

Pour $\varphi = -\alpha \quad M_A = k_2 Pr \quad T_A = k_3 Pr$

Tableau 5.3

α	$k_1 = \frac{M_D}{Pr}$	$k_2 = \frac{M_A}{Pr}$	$k_3 = \frac{T_A}{Pr}$
90	0,3183	- 0,5000	0,1817
80	0,2959	- 0,4410	0,1218
70	0,2693	- 0,3777	0,0759
60	0,2387	- 0,3136	0,0433
50	0,2047	- 0,2515	0,0218
45	0,1865	- 0,2217	0,0146
40	0,1676	- 0,1930	0,0093
30	0,1279	- 0,1392	0,0030
20	0,0864	- 0,0898	0,0006
10	0,0435	- 0,0440	0,0000

■ **Cas 3 : charge concentrée (P) dans une section repérée par l'angle β**

$$V_D = \frac{(\alpha - \beta)(\cos \beta + 1) - \sin(\alpha - \beta) - \sin \alpha + \sin \beta}{4(\alpha - \sin \alpha)} P$$

$$M_D = \frac{\cos \beta - \cos \alpha - (\alpha - \beta) \sin \beta}{2\alpha} Pr$$

Dans une section quelconque repérée par l'angle φ :

$$\begin{aligned} -\alpha < \varphi < \beta \quad V &= V_D \\ M &= M_D \cos \varphi + V_D r \sin \varphi \\ T &= M_D \sin \varphi + V_D r (1 - \cos \varphi) \end{aligned}$$

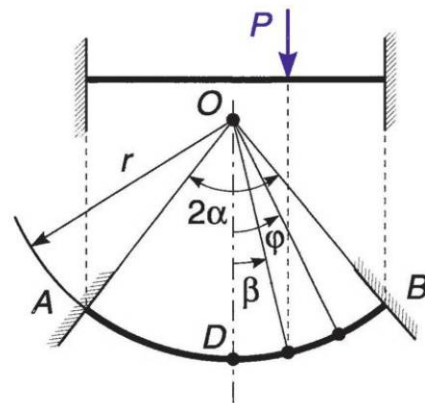


Figure 5.80

$$\begin{aligned} \beta < \varphi < \alpha \quad V &= -V_D \\ M &= M_D \cos \varphi + V_D r \sin \varphi - Pr \sin(\varphi - \beta) \\ T &= M_D \sin \varphi + V_D r (1 - \cos \varphi) - Pr [1 - \cos(\varphi - \beta)] \end{aligned}$$

5.5.3 Poutre circulaire fermée, sur appuis pendulaires

On considère la poutre circulaire de rayon moyen r , chargée normalement à son plan, reposant sur n appuis pendulaires régulièrement espacés, fournissant uniquement une réaction perpendiculaire au plan de la poutre. Les travées sont toutes identiques et le moment quadratique des sections est supposé variant symétriquement par rapport au milieu des travées.

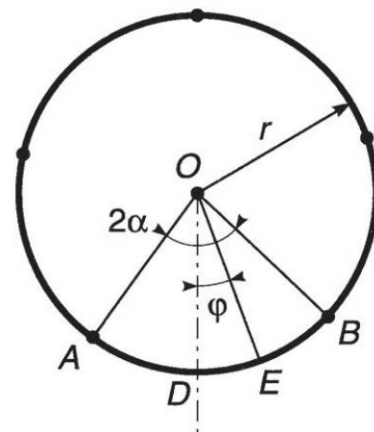


Figure 5.81

■ **Cas 1 : charge uniformément répartie (p) par unité de longueur de la poutre**

Réaction d'appui $R = \frac{2\pi}{n} pr$ Effort tranchant maximal $V = \pm \frac{R}{2}$

Au point courant E défini par l'angle φ

$$\left. \begin{array}{l} \text{moment de flexion} \quad M = pr^2 \left(\frac{\alpha}{\sin \alpha} \cos \varphi - 1 \right) \\ \text{moment de torsion} \quad T = pr^2 \left(\frac{\alpha}{\sin \alpha} \sin \varphi - \varphi \right) \end{array} \right\} \quad (5.46)$$

Sur appuis $M_A = pr^2 \left(\frac{\alpha}{\tan \alpha} - 1 \right) = k_1 pr^2$

En D , milieu de la travée $M_D = pr^2 \left(\frac{\alpha}{\sin \alpha} - 1 \right) = k_2 pr^2$

Le moment de torsion est nul en A et D ; sa valeur maximale est obtenue pour :

$$\varphi_1 = \arccos \frac{\sin \alpha}{\alpha} \quad T_{\max} = k_3 pr^2$$

correspondant à la section où le moment de flexion est nul.

Tableau 5.4 Valeurs numériques des diverses fonctions

n	α	$k_1 = \frac{M_A}{pr^2}$	$k_2 = \frac{M_D}{pr^2}$	φ_1	$k_3 = \frac{T_{\max}}{pr^2}$
2	180°	-1,0000	0,5708	50,5°	0,33080
3	120°	-0,3954	0,2092	34,2°	0,08270
4	90°	-0,2146	0,1107	25,8°	0,03310
5	72°	-0,1352	0,0690	20,7°	0,01660
6	60°	-0,0931	0,0472	17,3°	0,00950
8	45°	-0,0519	0,0262	13,0°	0,00395
12	30°	-0,0230	0,0115	8,6°	0,00116

■ Cas 2 : charge concentrée (P) au milieu de chaque travée

Réaction d'appui $R = P$

Effort tranchant $V = \pm \frac{P}{2}$

Au point courant E défini par l'angle φ :

$$\left. \begin{array}{l} \text{flexion} \quad M = \frac{Pr}{2} \left(\cos \varphi \tan \frac{\alpha}{2} - \sin \varphi \right) \\ \text{torsion} \quad T = \frac{Pr}{2} \left(\sin \varphi \tan \frac{\alpha}{2} + \cos \varphi - 1 \right) \end{array} \right\} \quad (5.47)$$

En A et D : $M = \pm \frac{Pr}{2} \tan \frac{\alpha}{2}$

Le moment de torsion est nul en A et D ; sa valeur maximale est obtenue pour $\varphi_2 = \frac{\alpha}{2}$, correspondant à la section où le moment de flexion est nul :

$$T_{\max} = \frac{Pr}{2} \left(\frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2}} - 1 \right)$$

5.5.4 Poutre circulaire bloquée latéralement sur deux appuis linéaires horizontaux

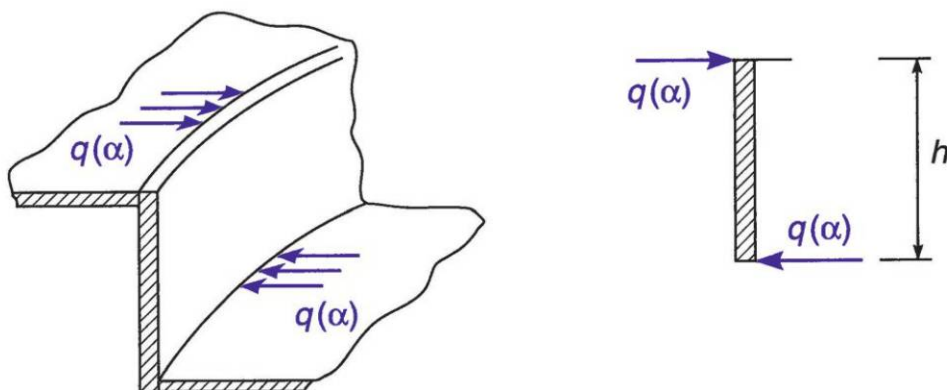


Figure 5.82

Du fait de la présence des appuis horizontaux, le moment de torsion T est nul en tout point ; les formules (5.41) s'écrivent alors :

$$\frac{dV}{ds} = -p \quad \frac{M}{r} = C_x \quad \frac{dM}{ds} = -C_y + V$$

La première et la dernière formule sont celles qui régissent le calcul des poutres droites ; les formulaires correspondant s'appliquent donc pour déterminer M et V .

De la seconde formule, on déduit :

$$q(\alpha) = \frac{C_x}{h} = \frac{M}{hr} \quad (5.48)$$

5.6 Anneaux avec chargement symétrique dans leur plan

5.6.1 Méthode générale

Méthode générale

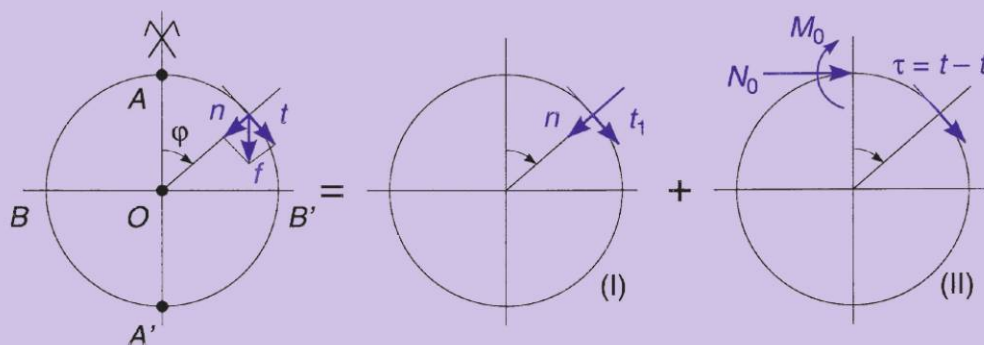


Figure 5.83

Le point courant d'un anneau d'épaisseur constante et de rayon r est repéré par l'angle mesuré à partir du point A . Cet anneau est soumis à une fonction de charge $\vec{f}$ ds caractérisée par ses composantes n et t sur la normale et la tangente.

On peut démontrer que la fonction de charge tangente t_1 qui, associée à n , est funiculaire (donc $M = 0$ et $V = 0$) de l'anneau est :

$$t_1 = \frac{dn}{d\varphi}$$

Ainsi la fonction de charge $\vec{f}$ ds peut être étudiée par superposition des cas I et II.

$$\text{Cas I} \quad M = 0 \quad V = 0 \quad N = nr$$

$$\text{Cas II} \quad M = M_0 + N_0 r (1 - \cos \varphi) + \int_0^\varphi \tau r^2 [1 - \cos(\varphi - \xi)] d\xi$$

$$N = N_0 \cos \varphi + \int_0^\varphi \tau r \cos(\varphi - \xi) d\xi$$

M_0 et N_0 représentent le moment de flexion et l'effort normal au point A.

M_0 et N_0 sont obtenus en écrivant que, par symétrie, le point A ne tourne pas et ne se déplace pas suivant N_0 ; cela se traduit par :

$$\int_0^\pi M d\varphi = 0 \quad \int_0^\pi M \cos \varphi d\varphi = 0$$

Les déformations peuvent être évaluées à partir des formules de Bresse (3.11 à 3.13) ; on obtient en particulier, en négligeant les déformations dues à V et N :

$$\text{Variation du diamètre } AA' \quad \Delta_{AA'} = \frac{r^2}{EI} \int_0^\pi M \sin \varphi d\varphi$$

$$\text{Variation du diamètre } BB' \quad \Delta_{BB'} = \frac{2r^2}{EI} \int_0^{\pi/2} M \cos \varphi d\varphi$$

5.6.2 Formulaire des anneaux non appuyés

■ **Cas 1 : charge radiale uniformément répartie sur tout le périmètre**

Quelle que soit la section

$$M = 0 \quad V = 0 \quad N = pr$$

Variation du diamètre

$$\Delta = -\frac{2pr^2}{E\Omega}$$

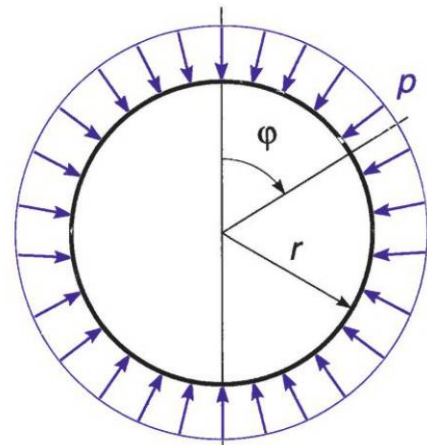


Figure 5.84

■ **Cas 2 : charge de n forces égales P , également réparties**

$$M = -\frac{Pr}{2} \left(\frac{\cos \varphi}{\sin \alpha} - \frac{1}{\alpha} \right)$$

$$V = \frac{Pr \sin \varphi}{\sin \alpha}$$

$$N = \frac{P}{2} \cdot \frac{\cos \varphi}{\sin \alpha}$$

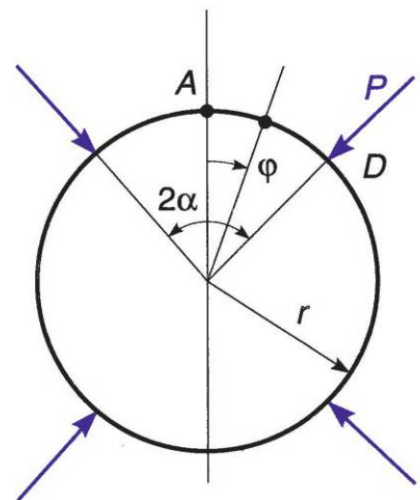


Figure 5.85

Valeurs particulières

en A : $M_A = -\frac{Pr}{2} \left(\frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{\alpha} \right) = k_1 Pr$

en D : $M_D = -\frac{Pr}{2} \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{1}{\alpha} \right) = k_2 Pr$

Tableau 5.5 Valeurs numériques k_1 et k_2

n	2α	k_2	k_1
2	180°	+ 0,3183	- 0,1817
3	120°	+ 0,1888	- 0,0999
4	90°	+ 0,1366	- 0,0705
5	72°	+ 0,1076	- 0,0549
6	60°	+ 0,0889	- 0,0451
8	45°	+ 0,0661	- 0,0333

Déplacement radial du point D :

$$v = \frac{Pr}{4E\Omega \sin^2 \alpha} \left[\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2} + r^2 \frac{\Omega}{I} \left(\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2} - \frac{2 \sin^2 \alpha}{\alpha} \right) \right]$$

■ Cas 3 : charge uniformément répartie

$$M = \frac{pr^2}{4} \cos 2\varphi$$

$$V = -\frac{pr}{2} \sin 2\varphi$$

$$N = pr \sin^2 \varphi$$

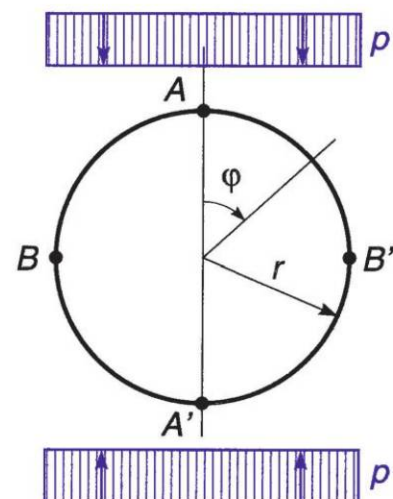


Figure 5.86

Variation de longueur du diamètre :

$$\Delta_{AA'} = -\frac{pr^4}{6EI} \quad \Delta_{BB'} = \frac{pr^4}{6EI}$$

■ **Cas 4 : poussée triangulaire**

$$M = \frac{p_0 r^2}{48} (\cos 3\varphi - 6 \cos 2\varphi)$$

$$V = -\frac{p_0 r}{4} \left(\frac{\sin \varphi}{4} - \sin 2\varphi \right)$$

$$N = \frac{p_0 r}{12} \cos \varphi [4 - 3(2 - 2 \cos \varphi - \sin^2 \varphi)]$$

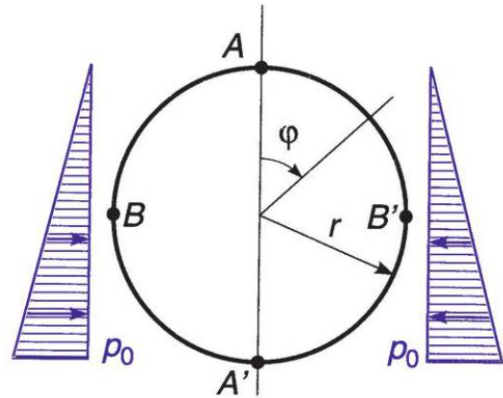


Figure 5.87

Variations de longueur du diamètre :

$$\Delta_{AA'} = \frac{p_0 r^4}{12 EI} \quad \Delta_{BB'} = -\frac{p_0 r^4}{12 EI}$$

■ **Cas 5 : charge radiale sinusoïdale $p_0 \sin \varphi$**

$$M = p_0 r^2 \left(\frac{2}{\pi} - \frac{\pi}{4} \cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{2} + \frac{\varphi}{2} \cos \varphi \right)$$

$$V = \frac{p_0 r}{4} (\pi - 2\varphi) \sin \varphi$$

$$N = \frac{p_0 r}{4} (\pi \cos \varphi + 4 \sin \varphi - 2\varphi \cos \varphi - \cos \varphi \sin 2\varphi - 2 \sin^3 \varphi)$$

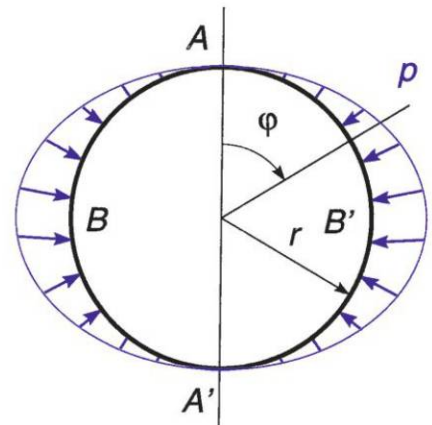


Figure 5.88

■ **Cas 6 : anneau soumis à un effort tranchant F**

$$\tau = \frac{F}{\pi r} \sin \varphi \quad N = \frac{F}{4\pi} (3 \cos \varphi - 2\varphi \sin \varphi)$$

$$M = \frac{Fr}{4\pi} (\cos \varphi + 2\varphi \sin \varphi - 2)$$

$$V = \frac{F}{4\pi} (\sin \varphi + 2\varphi \cos \varphi)$$

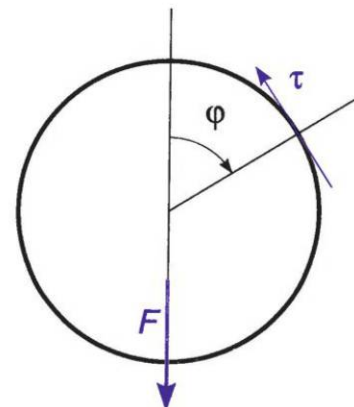


Figure 5.89

■ **Cas 7 : cas particulier de l'anneau soumis sur tout son contour à une densité de couple c**

$$M = -cr$$

$$V = 0$$

$$N = 0$$

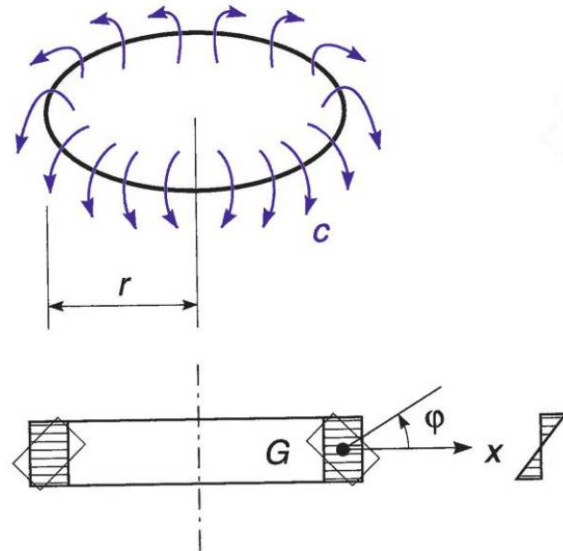


Figure 5.90

toutes les sections tournent d'un angle :

$$\varphi = -\frac{cr^2}{EI}$$

I est le moment quadratique de la section par rapport à Gx .

5.6.3 Formulaire des anneaux appuyés sur une génératrice

■ **Cas 1 : deux charges concentrées horizontales**

$$R = 0$$

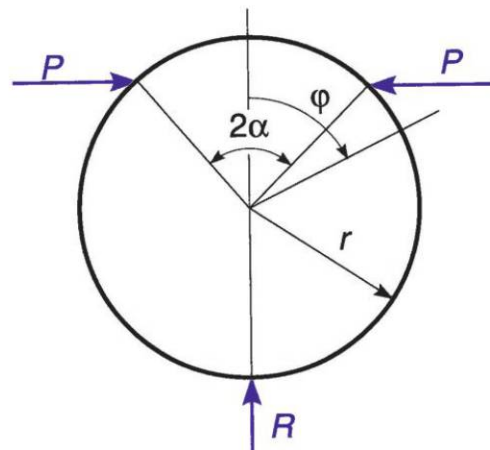


Figure 5.91

$$0 < \varphi < \alpha \quad N = \frac{P}{\pi}(\pi - \alpha + \sin \alpha \cos \alpha) \cos \varphi$$

$$M = \frac{Pr}{\pi}[\sin \alpha + (\pi - \alpha) \cos \alpha - (\pi - \alpha + \sin \alpha \cos \alpha) \cos \varphi]$$

$$V = \frac{P}{\pi}(\pi - \alpha + \sin \alpha \cos \alpha) \sin \varphi$$

$$\alpha < \varphi < \pi \quad N = \frac{P}{\pi}(\sin \alpha \cos \alpha - \alpha) \cos \varphi$$

$$M = \frac{Pr}{\pi}[\sin \alpha - \alpha \cos \alpha + (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha) \cos \varphi]$$

$$V = \frac{P}{\pi}(\sin \alpha \cos \alpha - \alpha) \sin \varphi$$

■ **Cas 2 : deux charges concentrées verticales symétrique**

$$R = 2P$$

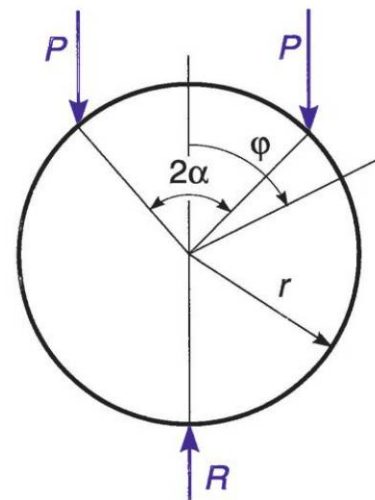


Figure 5.92

$$0 < \varphi < \alpha \quad N = -\frac{P}{\pi} \sin^2 \alpha \cos \varphi$$

$$M = \frac{Pr}{\pi}[1 + \cos \alpha - (\pi - \alpha) \sin \alpha + \sin^2 \alpha \cos \varphi]$$

$$V = -\frac{P}{\pi} \sin^2 \alpha \sin \varphi$$

$$\alpha < \varphi < \pi \quad N = \frac{P}{\pi}(\pi \sin \varphi - \sin^2 \alpha \cos \varphi)$$

$$M = \frac{Pr}{\pi}(1 + \alpha \sin \alpha + \cos \alpha + \sin^2 \alpha \cos \varphi - \pi \sin \varphi)$$

$$V = -\frac{P}{\pi}(\sin^2 \alpha \sin \varphi + \pi \cos \varphi)$$

■ Cas 3 : charge radiale uniformément répartie

$$R = 2pr \sin \alpha$$

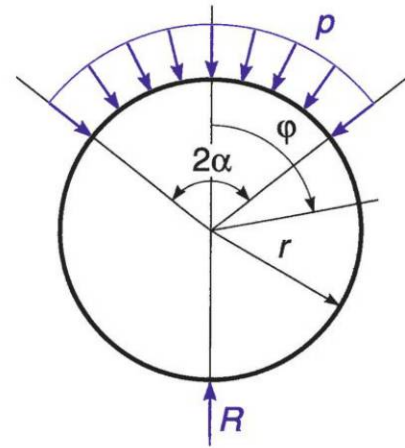


Figure 5.93

$$0 < \varphi < \alpha \quad N = \frac{pr}{\pi}[\pi - [(\pi - \alpha) \cos \alpha + \sin \alpha] \cos \varphi]$$

$$M = \frac{pr^2}{\pi}[[(\pi - \alpha) \cos \alpha + \sin \alpha] \cos \varphi - \pi + \alpha + \sin \alpha]$$

$$V = -\frac{pr}{\pi}[(\pi - \alpha) \cos \alpha + \sin \alpha] \sin \varphi$$

$$\alpha < \varphi < \pi \quad N = \frac{pr}{\pi}[\pi \sin \alpha \sin \varphi + (\alpha \cos \alpha - \sin \alpha) \cos \varphi]$$

$$M = \frac{pr^2}{\pi}[(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) \cos \varphi - \pi \sin \alpha \sin \varphi + \alpha + \sin \alpha]$$

$$V = -\frac{pr}{\pi}[(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) \sin \varphi + \pi \sin \alpha \cos \varphi]$$

■ **Cas 4 : deux couples symétriques**

$$R = 0$$

$$0 < \varphi < \pi \quad N = \frac{2C}{\pi r} \sin \alpha \cos \varphi \quad V = \frac{2C}{\pi r} \sin \alpha \sin \varphi$$

$$0 < \varphi < \alpha \quad M = \frac{C}{\pi} [(\pi - \alpha) - 2 \sin \alpha \cos \varphi]$$

$$\alpha < \varphi < \pi \quad M = -\frac{C}{\pi} (\alpha + 2 \sin \alpha \cos \varphi)$$

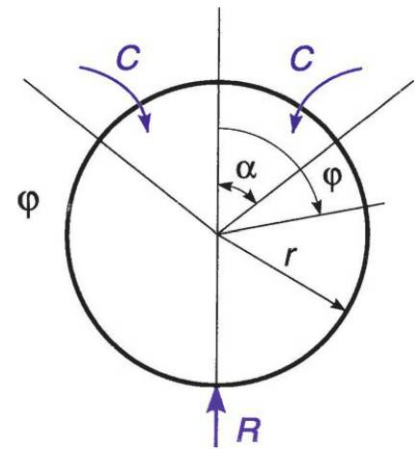


Figure 5.94

■ **Cas 5 : charge verticale uniforme (poids propre)**

$$R = 2\pi r p$$

$$N = \frac{pr}{2} (2\varphi \sin \varphi - \cos \varphi)$$

$$M = \frac{pr^2}{2} (2 - \cos \varphi - 2\varphi \sin \varphi)$$

$$V = -\frac{pr}{2} (\sin \varphi + 2\varphi \cos \varphi)$$

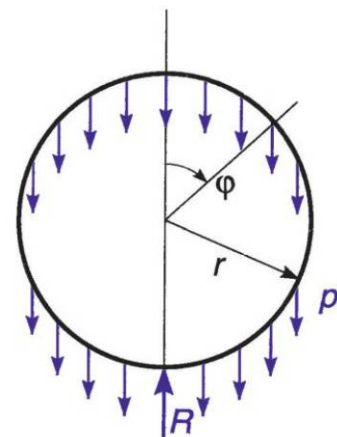


Figure 5.95

■ **Cas 6 : liquide de poids spécifique ϖ remplissant entièrement l'anneau**

$$R = \pi \varpi r^2$$

$$N = \frac{\varpi r^2}{4} (2\varphi \sin \varphi + \cos \varphi - 2)$$

$$M = \frac{\varpi r^3}{4} (2 - \cos \varphi - 2\varphi \sin \varphi)$$

$$V = -\frac{\varpi r^2}{4} (\sin \varphi + 2\varphi \cos \varphi)$$

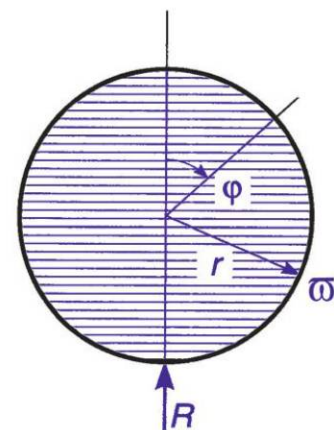


Figure 5.96

■ **Cas 7 : charge radiale répartie sinusoïdale** $\frac{p_0}{2}(1 - \cos \varphi)$

$$R = -\frac{\pi p_0 r}{2}$$

$$N = \frac{p_0 r}{8}(2 - \cos \varphi - 2\varphi \sin \varphi)$$

$$M = \frac{p_0 r^2}{8}(2\varphi \sin \varphi + \cos \varphi - 2)$$

$$V = \frac{p_0 r}{8}(\sin \varphi + 2\varphi \cos \varphi)$$

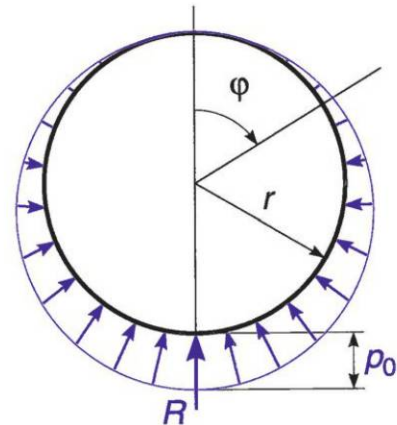


Figure 5.97

■ **Cas 8 : charge radiale répartie sinusoïdale** $p_0 \cos \varphi$

$$R = \pi p_0 r$$

$$N = \frac{p_0 r}{4}(\cos \varphi + 2\varphi \sin \varphi)$$

$$M = \frac{p_0 r^2}{4}(2 - \cos \varphi - 2\varphi \sin \varphi)$$

$$V = -\frac{p_0 r}{4}(\sin \varphi + 2\varphi \cos \varphi)$$

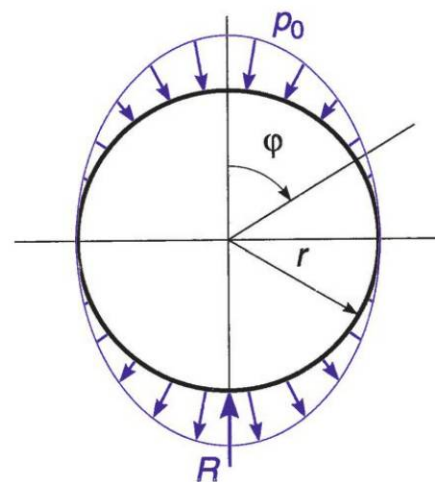


Figure 5.98

■ **Cas 9 : charge tangentielle f constante par unité de longueur**

$$R = 4fr$$

$$N = \frac{fr}{\pi}(\pi \sin \varphi - 4\cos \varphi)$$

$$M = \frac{fr^2}{2\pi}[4 - \pi^2 + 2\pi(\varphi - \sin \varphi) + 8\cos \varphi]$$

$$V = -\frac{fr}{2\pi}[2\pi(1 - \cos \varphi) - 8\sin \varphi]$$

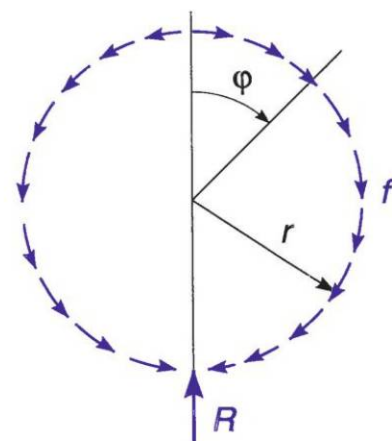


Figure 5.99

5.6.4 Anneau non circulaire : cas de l'as de carreau

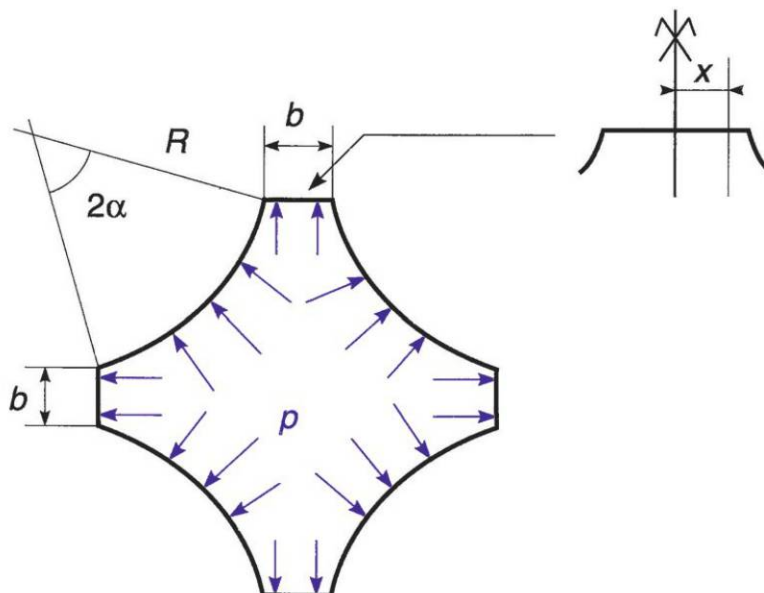


Figure 5.100

Sur la partie courbe :

$$N = pR \left[1 - \cos \varphi \left(\cos \alpha + \sin \alpha + \frac{b}{R\sqrt{2}} \right) \right]$$

$$M = pR^2 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} - \cos \varphi \right) \left(\sin \alpha + \cos \alpha + \frac{b}{R\sqrt{2}} \right)$$

$$V = -pR \sin \varphi \left(\cos \alpha + \sin \alpha + \frac{b}{R\sqrt{2}} \right)$$

Sur la partie droite :

$$N = -pR \left(\frac{b}{2R} + \sqrt{2} \sin \alpha \right)$$

$$M = p \left[R^2 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} - \cos \alpha \right) \left(\sin \alpha + \cos \alpha + \frac{b}{R\sqrt{2}} \right) - \frac{b^2}{8} + \frac{x^2}{2} \right]$$

$$V = px$$

5.7 Portiques

Définition

Un **portique** est un système constitué par des poutres droites appelées barres ayant leurs plans moyens situés dans un même plan, et soumises à des forces se trouvant dans ce plan. Les barres sont assemblées aux nœuds (points de concours des barres) par une articulation ou un encastrement ; les nœuds peuvent être déplaçables ou non déplaçables selon la nature des liaisons existant entre le portique et le milieu extérieur.

5.7.1 Méthode générale

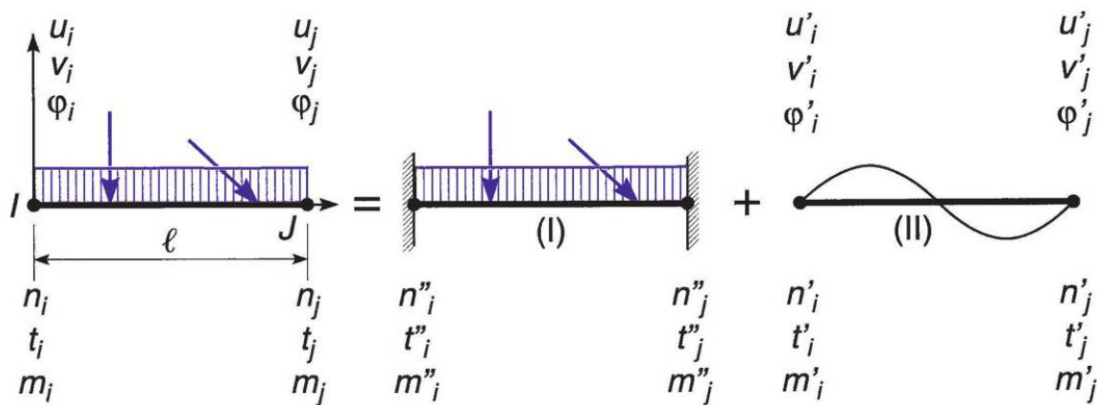


Figure 5.101

Considérons une barre IJ de portée ℓ , joignant des nœuds I et J , et soumise à un chargement donné. On désigne dans le repère de la barre par u_i , v_i , et φ_i les composantes de déplacements du nœud I , et par n_i , t_i et m_i les composantes d'efforts appliquées par la barre au nœud I , comptées positivement lorsqu'elles tendent à déplacer le nœud dans le sens positif. On désignerait de la même façon les composantes de déplacements et d'efforts appliquées au nœud J , en substituant l'indice j à l'indice i .

Il en résulte, en tenant compte des conventions de signes définies au début du présent ouvrage pour les déplacements et les sollicitations :

$$\begin{aligned} n_i &= N_i & n_j &= -N_j \\ t_i &= V_i & t_j &= -V_j \\ m_i &= M_i & m_j &= -M_j \end{aligned}$$

N_i , N_j , V_i , V_j , M_i et M_j sont les sollicitations dans la barre aux extrémités I et J .

■ Relations entre efforts et déplacements dans le repère local

On désigne par $[f_i]$ et $[f_j]$ les vecteurs des efforts appliqués aux nœuds I et J , et par $[d_i]$ et $[d_j]$ ceux des déplacements.

L'état de la barre IJ peut être considéré comme la superposition des deux états (I) et (II) de la figure 5.101.

L'état (I) correspond à la barre IJ parfaitement encastree à ses deux extrémités ; dans ce cas, les déplacements des nœuds sont tous nuls et on désigne par $[f''_i]$ et $[f''_j]$ les vecteurs des efforts appliqués. Pour déterminer ces efforts, on se reportera au paragraphe 5.1.3.

L'état (II) correspond à la barre IJ non chargée et soumise à des efforts aux extrémités correspondant aux déplacements subis ; des relations linéaires peuvent être établies entre les efforts appliqués et les déplacements grâce aux formules de Bresse (paragraphe 3.8).

$$\left. \begin{aligned} n'_i &= \frac{E\Omega}{\ell} u'_i - \frac{E\Omega}{\ell} u'_j \\ t'_i &= \frac{12EI}{\ell^3} v'_i + \frac{6EI}{\ell^2} \varphi'_i - \frac{12EI}{\ell^3} v'_j + \frac{6EI}{\ell^2} \varphi'_j \\ m'_i &= \frac{6EI}{\ell^2} v'_i - \frac{4EI}{\ell} \varphi'_i + \frac{6EI}{\ell^2} v'_j - \frac{2EI}{\ell} \varphi'_j \end{aligned} \right\} \quad (5.49)$$

$$\left. \begin{aligned} n'_j &= -\frac{E\Omega}{\ell} u'_i + \frac{E\Omega}{\ell} u'_j \\ t'_j &= -\frac{12EI}{\ell^3} v'_i - \frac{6EI}{\ell^2} \varphi'_i - \frac{12EI}{\ell^3} v'_j - \frac{6EI}{\ell^2} \varphi'_j \\ m'_j &= -\frac{6EI}{\ell^2} v'_i - \frac{2EI}{\ell} \varphi'_i + \frac{6EI}{\ell^2} v'_j - \frac{4EI}{\ell} \varphi'_j \end{aligned} \right\} \quad (5.50)$$

Ce qui s'écrit sous forme matricielle :

$$[f'_i] = [k_i][d'_i] + [\ell_j][d'_j]$$

$$[f'_j] = [\ell_i][d'_i] + [k_j][d'_j]$$

la superposition des systèmes (I) et (II) conduit à :

$$[f_i] = [f'_i] + [f''_i]$$

$$[d_i] = [d'_i]$$

de même avec l'indice j .

■ Expressions dans le repère global

Il faut réécrire ces expressions en se plaçant dans le repère global du portique ; les déplacements dans le repère local (u, v, φ) et les déplacements dans le repère global (x, y, θ) sont reliés par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} u &= x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ v &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha \\ \theta &= \varphi \end{aligned}$$

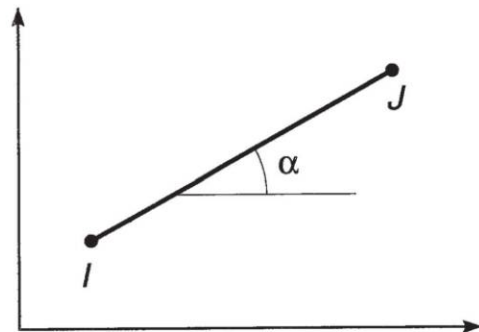


Figure 5.102

Une relation identique peut être écrite entre les efforts dans le repère local (n, t, m) et les efforts dans le repère global (X, Y, C) .

Soit sous forme matricielle :

$$[d] = [R][D] \quad [f] = [R][F] \quad (5.51)$$

■ Équilibre des nœuds

Désignons par $[F_{oi}]$ le vecteur des forces extérieures appliquées au nœud I . L'équilibre du nœud exige que l'ensemble des efforts apportés par les barres connectées en I soit égale aux forces extérieures, soit :

$$[F_{oi}] = \sum [F_i]$$

qui peut être développé ainsi :

$$\begin{aligned} [F_{oi}] &= \sum [F_i] = \sum [R]^T [f_i] = \sum [R]^T ([f'_i] + [f''_i]) \\ &= \sum [R]^T ([k_i][d_i] + [\ell_j][d_j] + [f''_i]) \\ &= \sum ([R]^T [k_i][R][D_i] + [R]^T [\ell_j][R][D_j]) + \sum ([R]^T [f''_i]) \end{aligned} \quad (5.52)$$

■ Matrice de rigidité

L'équation d'équilibre (5.52) est écrite autant de fois qu'il y a de nœuds ; ainsi l'expression (5.52) étendue à l'ensemble du portique peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$[F_o] = [K][D] + [F''] \quad (5.53)$$

où $[K]$ est appelé la matrice de rigidité.

■ Résolution

La résolution de (5.53) consiste à écrire :

$$[F] = [F_o] - [F''] = [K][D]$$

Les termes de $[F'']$ correspondent aux charges appliquées et sont tous connus.

Les termes de $[F_o]$ correspondent aux forces directement appliquées aux nœuds ; parmi elles, celles appliquées aux nœuds d'appui (réactions) ne sont pas connues. Ainsi, le système d'équations peut être divisé en deux sous-systèmes, le premier correspondant aux nœuds non appuyés ($[F_1]$ et $[D_1]$), le second aux nœuds appuyés ($[F_2]$ et $[D_2]$).

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}$$

où sont connus $[F_1]$ et $[D_2] = 0$, et inconnus $[F_2]$ et $[D_1]$.

Des équations reliant $[F_1]$ et $[D_1]$, on déduit les valeurs de $[D_1]$.

Des équations reliant $[F_2]$ et $[D_1]$, on déduit les valeurs de $[F_2]$, c'est-à-dire les réactions d'appui.

■ Sollicitations dans les barres

La relation (5.51) permet de déterminer les déplacements $[d]$ dans le repère local à partir des déplacements dans le repère global. Les efforts appliqués par les barres aux nœuds sont calculés avec les formules (5.49) et (5.50), d'où les sollicitations.

Exemple

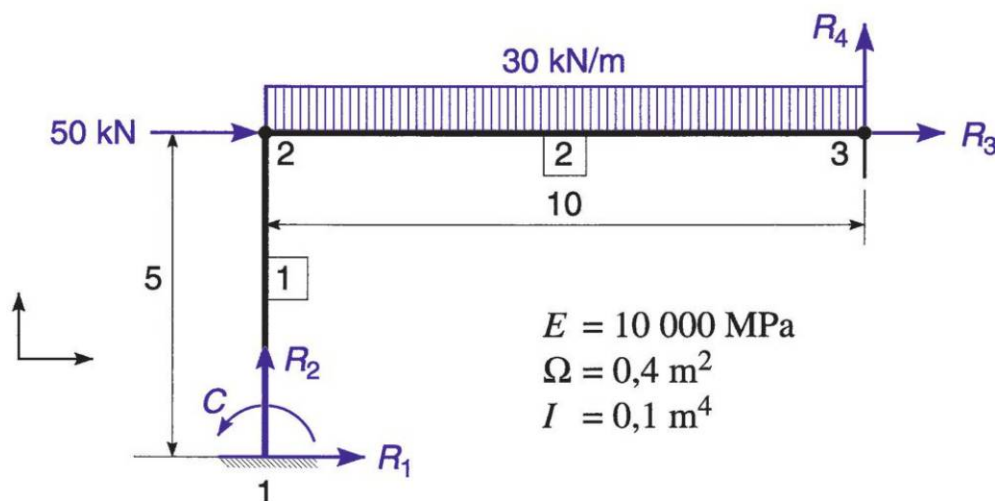


Figure 5.103

Efforts appliqués aux nœuds par les barres chargées

barre 1 $n''_1 = n''_2 = t''_1 = t''_2 = m''_1 = m''_2 = 0$

barre 2 $n''_2 = n''_3 = 0 \quad t''_2 = t''_3 = \frac{30 \times 10}{2} = 150 \text{ kN}$

$$m''_2 = -m''_3 = -\frac{30 \times 10^2}{12} = -250 \text{ kNm}$$

Conditions d'appui

nœud 1, encastré

$$u_1 = v_1 = \varphi_1 = 0$$

nœud 3, articulé

$$u_3 = v_3 = 0$$

Relations entre efforts et déplacements dans les repères locaux $[f_i] = [f'_i] + [f''_i]$

barre 1 $n_1 = -800u_2$

$n_2 = 800u_2$

$t_1 = -96v_2 + 240\varphi_2$

$t_2 = 96v_2 - 240\varphi_2$

$m_1 = 240v_2 - 400\varphi_2$

$m_2 = 240v_2 - 800\varphi_2$

barre 2 $n_2 = 400u_2$

$n_3 = -400u_2$

$t_2 = 12v_2 + 60\varphi_2 + 60\varphi_3 + 0,15$

$t_3 = -12v_2 - 60\varphi_2 - 60\varphi_3 + 0,15$

$$m_2 = -60v_2 - 400\varphi_2 - 200\varphi_3 - 0,25$$

$$m_3 = -60v_2 - 200\varphi_2 - 400\varphi_3 + 0,25$$

Expression des termes $[F_i]$ dans le repère global $[F] = [R]^T[f]$ barre 1 ($\alpha=90^\circ$)

$X_1 = -96x_2 - 240\theta_2$

$X_2 = 96x_2 + 240\theta_2$

$Y_1 = -800y_2$

$Y_2 = 800y_2$

$C_1 = -240x_2 - 400\theta_2$

$C_2 = -240x_2 - 800\theta_2$

barre 2 ($\alpha=0^\circ$)

$X_2 = 400x_2$

$X_3 = -400x_2$

$$Y_2 = 12y_2 + 60\theta_2 + 60\theta_3 + 0,15$$

$$Y_3 = -12y_2 - 60\theta_2 - 60\theta_3 + 0,15$$

$$C_2 = -60y_2 - 400\theta_2 + 200\theta_3 - 0,25$$

$$C_3 = -60y_2 - 200\theta_2 - 400\theta_3 + 0,25$$

Équilibre des nœuds $[F_{oi}] = \sum[F_i]$

$$\begin{aligned}\text{nœud 1} \quad R_1 &= -96x_2 - 240\theta_2 \\ R_2 &= -800y_2 \\ C &= -240x_2 - 400\theta_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{nœud 2} \quad 0,050 &= 496x_2 + 240\theta_2 \\ 0 &= 812y_2 + 60\theta_2 + 60\theta_3 + 0,15 \\ 0 &= -240x_2 - 60y_2 - 1200\theta_2 - 200\theta_3 - 0,25\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{nœud 3} \quad R_3 &= -400x_2 \\ R_4 &= -12y_2 - 60\theta_2 - 60\theta_3 + 0,15 \\ 0 &= -60y_2 - 200\theta_2 - 400\theta_3 + 0,25\end{aligned}$$

RésolutionIsolement du sous-système $[F_1]$

$$\begin{array}{rcccccccl} 496 x_2 & & + & 240 \theta_2 & & = & 0,05 \\ & 812 y_2 & + & 60 \theta_2 & + & 60 \theta_3 & = & -0,15 \\ 240 x_2 & + & 60 y_2 & + & 1200 \theta_2 & + & 200 \theta_3 & = & -0,25 \\ & & 60 y_2 & + & 200 \theta_2 & + & 400 \theta_3 & = & 0,25 \end{array}$$

On trouve :

$$\begin{aligned}x_2 &= 0,000294 \text{ m} & \theta_2 &= -0,000399 \text{ rad} \\ y_2 &= -0,000219 \text{ m} & \theta_3 &= 0,000857 \text{ rad}\end{aligned}$$

Réaction

$$R_1 = 68 \text{ kN} \quad R_2 = 175 \text{ kN} \quad C = 89 \text{ kNm} \quad R_3 = -118 \text{ kN} \quad R_4 = 125 \text{ kN}$$

Sollicitations

$$\begin{aligned}
 \text{barre 1 } (\alpha=90^\circ) \quad & u_2 = y_2 = -0,000219 \text{ m} \quad v_2 = -x_2 = -0,000294 \text{ m} \\
 & \varphi_2 = \theta_2 = -0,000399 \text{ rad} \\
 & N_1 = n_1 = 175 \text{ kN} \quad V_1 = t_1 = -68 \text{ kN} \\
 & M_1 = m_1 = 89 \text{ kNm} \quad M_2 = -m_2 = -249 \text{ kNm.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{barre 2 } (\alpha=0^\circ) \quad & u_2 = 0,000294 \text{ m} \quad v_2 = -0,000219 \text{ m} \\
 & \varphi_2 = -0,000399 \quad \varphi_3 = 0,000857 \\
 & N_2 = n_2 = 118 \text{ kN} \\
 & V_2 = t_2 = 175 \text{ kN} \quad V_3 = -t_3 = -125 \text{ kN} \\
 & M_2 = m_2 = -249 \text{ kNm}
 \end{aligned}$$

5.7.2 Méthode des rotations

Considérons le cas particulier des portiques à nœuds non déplaçables ; par définition pour chaque nœud I :

$$u_i = v_i = 0$$

Les formules (5.49) et (5.50) s'écrivent :

$$m'_i = -\frac{4EI}{\ell} \varphi'_i - \frac{2EI}{\ell} \varphi'_j \quad (5.54)$$

$$m'_j = -\frac{2EI}{\ell} \varphi'_i - \frac{4EI}{\ell} \varphi'_j \quad (5.55)$$

L'équilibre des nœuds s'écrit :

$$C_i = \sum m_i$$

C_i est le couple extérieur appliqué au nœud I et $\sum m_i$ l'ensemble des couples appliqués par chaque barre concourant au nœud I . L'expression peut encore s'écrire :

$$C_i = \sum m_i = \sum m'_i + \sum m''_i$$

On obtient ainsi un ensemble d'équations linéaires permettant le calcul des rotations, puis des sollicitations.

5.7.3 Formulaire des portiques

■ Cas 1 : portique à un seul montant, une fois encastré, et une fois articulé

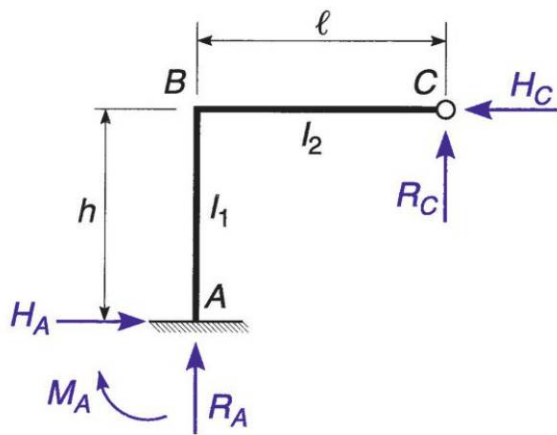


Figure 5.104

$$k = \frac{I_2}{I_1} \cdot \frac{b}{\ell}$$

5

Charge concentrée

$$R_C = \frac{P}{\ell^3} \cdot \frac{4\ell^3 - 6b\ell^2 + 2b^3 + 3a\ell^2}{3k + 4}$$

$$R_A = P - R_C$$

$$H_A = H_C = \frac{3}{2} \left(P \frac{a}{b} - R_C \frac{\ell}{b} \right)$$

$$M_B = R_C \ell - Pa$$

$$M_A = -\frac{M_B}{2}$$

$$M_p = R_C b$$

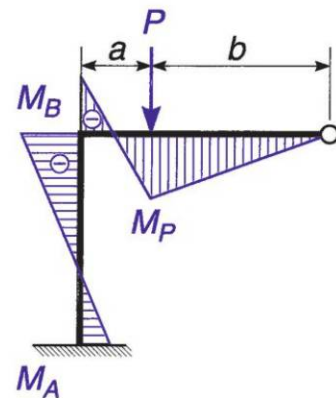


Figure 5.105

Charge uniformément répartie

$$R_C = \frac{3p\ell}{2} \cdot \frac{k+1}{3k+4}$$

$$R_A = p\ell - R_C$$

$$H_A = H_C = \frac{3p\ell^2}{4h} \cdot \frac{1}{3k+4}$$

$$M_B = R_C \ell - \frac{p\ell^2}{2}$$

$$M_A = -\frac{M_B}{2}$$

$$M_{\max} = \frac{R_C^2}{2p}$$

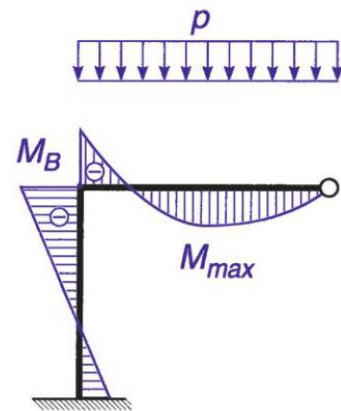


Figure 5.106

Force horizontale concentrée

$$R_A = -R_C = \frac{3Fab^2k}{h^2(3k\ell + 4)}$$

$$H_C = \frac{Fb^2}{h^3} \cdot \frac{3k(2a+h) + 2(a+2h)}{3k+4}$$

$$H_A = -F + H_C$$

$$M_A = -\frac{Fab}{h^2} \cdot \frac{3ak + 2(2h-b)}{3k+4}$$

$$M_B = R_C \ell$$

$$M_F = \frac{Fab^2}{h^3} \cdot \frac{6ak + 2(a+2h)}{3k+4}$$

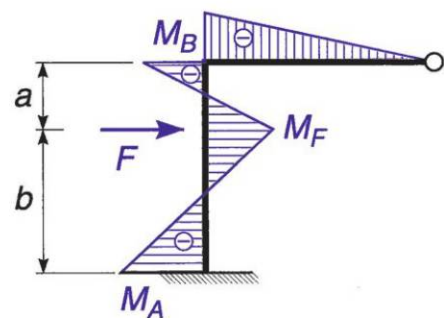


Figure 5.107

Force horizontale uniformément répartie

$$R_A = -R_C = \frac{fh^2k}{4\ell(3k+4)}$$

$$H_A = -\frac{fb}{2} \cdot \frac{3k+5}{3k+4}$$

$$H_C = \frac{3fb}{2} \cdot \frac{k+1}{3k+4}$$

$$M_A = -\frac{fb^2}{4} \cdot \frac{k+2}{3k+4}$$

$$M_B = R_C\ell \quad M_{\max} = \frac{fb^2}{8} \cdot \frac{3k^2 + 10k + 9}{(3k+4)^2}$$

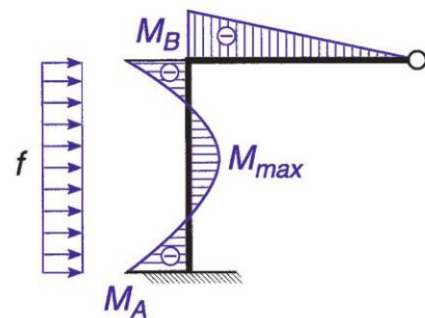


Figure 5.108

Élévation de température : allongement unitaire αt

$$H_A = H_C = \frac{6EI_1\alpha t[2\ell^2(3k+1) + 3h^2k]}{h^3\ell(3k+4)}$$

$$R_A = -R_C = \frac{6EI_1\alpha tk(2h^2 + 3\ell^2)}{h^2\ell^2(3k+4)}$$

$$M_B = R_C\ell \quad M_A = -\frac{M_B}{2}$$

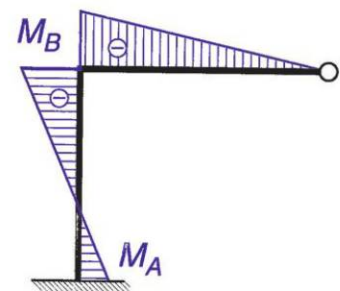


Figure 5.109

■ Cas 2 : portique à un seul montant, à deux encastres

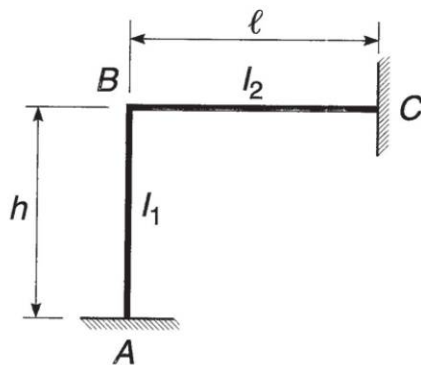


Figure 5.110

$$k = \frac{I_2}{I_1} \cdot \frac{h}{\ell}$$

Charge concentrée

avec $\beta = \frac{b}{\ell}$

$$M_B = -\frac{Pab}{\ell} \cdot \frac{\beta}{k+1}$$

$$M_A = -\frac{M_B}{2}$$

$$M_C = -\frac{Pab}{\ell} \cdot \frac{(2-\beta)k + 2(1-\beta)}{2(k+1)}$$

$$M_P = \frac{Pab}{\ell} + \beta M_B + (1-\beta)M_C$$

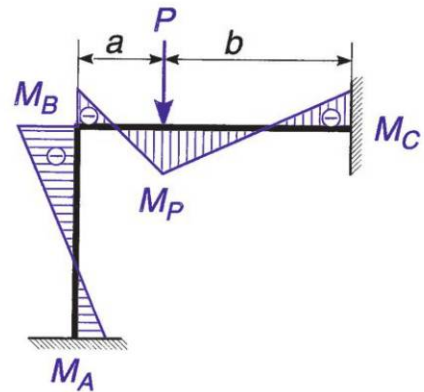


Figure 5.111

Charge uniformément répartie

$$M_B = -\frac{p\ell^2}{12(k+1)}$$

$$M_A = -\frac{M_B}{2}$$

$$M_C = -\frac{p\ell^2(3k+2)}{24(k+1)}$$

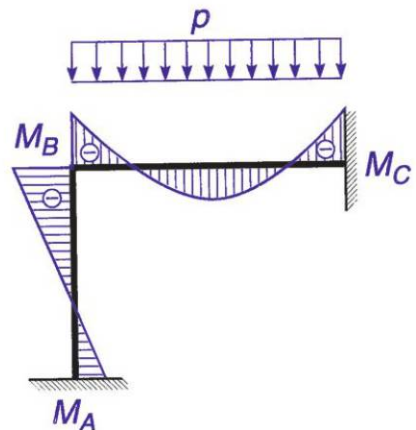


Figure 5.112

Élévation de température : allongement unitaire αt

$$M_A = \frac{3EI_2\alpha t}{\ell(k+1)} \left[\frac{\ell(k+1)}{hk} + \frac{\ell^2 + b^2}{\ell h} \right]$$

$$M_C = \frac{3EI_2\alpha t}{\ell(k+1)} \left[\frac{h(k+1)}{\ell} + \frac{\ell^2 + b^2}{\ell h} \right]$$

$$M_B = -\frac{6EI_2\alpha t}{\ell(k+1)} \cdot \frac{\ell^2 + b^2}{\ell h}$$

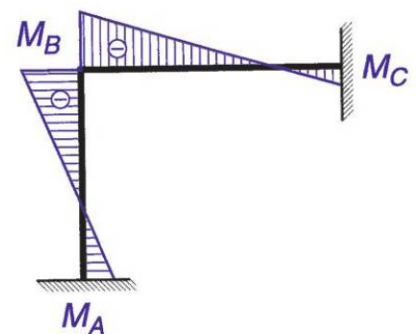


Figure 5.113

■ Cas 3 : portique à deux montants articulés

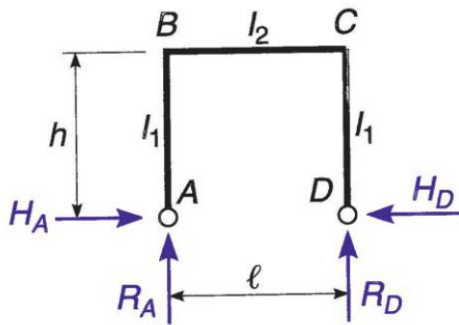


Figure 5.114

$$k = \frac{I_2}{I_1} \cdot \frac{h}{\ell}$$

Charge concentrée

$$R_A = \frac{Pb}{\ell} \quad R_D = \frac{Pa}{\ell}$$

$$H_A = H_D = \frac{3Pab}{2\ell h(2k + 3)}$$

$$M_B = M_C = -Hh$$

$$M_P = \frac{4k + 3}{2k + 3} \cdot \frac{Pab}{2\ell}$$

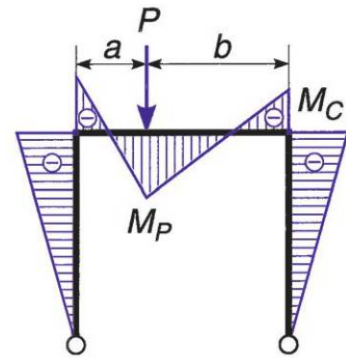


Figure 5.115

Charge uniformément répartie

$$R_A = R_D = \frac{p\ell}{2}$$

$$H_A = H_D = \frac{p\ell^2}{4h(2k + 3)}$$

$$M_B = M_C = -Hh$$

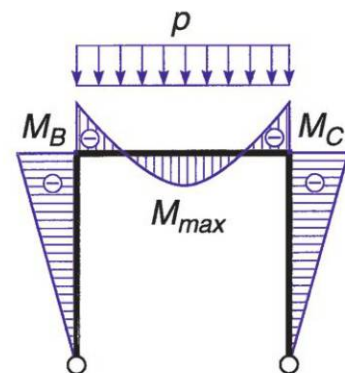


Figure 5.116

Dans l'axe du portique :

$$M_{\max} = \frac{2k + 1}{2k + 3} \cdot \frac{p\ell^2}{8}$$

Force horizontale au niveau de la traverse

$$R_D = -R_A = F \frac{h}{\ell}$$

$$H_A = -H_D = -\frac{F}{2}$$

$$M_B = -M_C = \frac{Fh}{2}$$

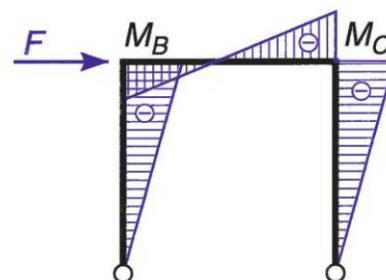


Figure 5.117

Force horizontale uniformément répartie

$$R_D = -R_A = \frac{fh^2}{2\ell}$$

$$H_A = -\frac{fh}{8} \cdot \frac{11k + 18}{2k + 3}$$

$$H_D = fh + H_A$$

$$M_B = \frac{3fh^2}{8} \cdot \frac{k + 2}{2k + 3}$$

$$M_C = -\frac{fh^2}{8} \cdot \frac{5k + 6}{2k + 3}$$

$$M_{\max} = \frac{fh^2}{128} \left(\frac{11k + 18}{2k + 3} \right)^2$$

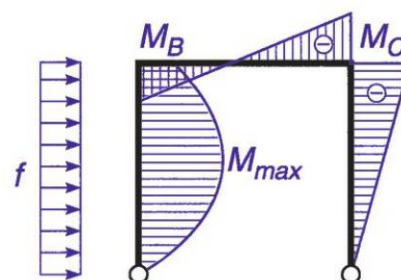


Figure 5.118

Élévation de température : allongement unitaire αt

$$R_D = R_A = 0$$

$$H_A = H_D = \frac{3EI_2\alpha t}{h^2(2k + 3)}$$

$$M_B = M_C = -H_A h$$

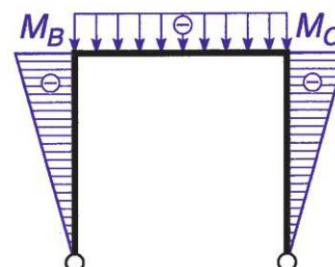


Figure 5.119

■ Cas 4 : portique à deux montants encastrés

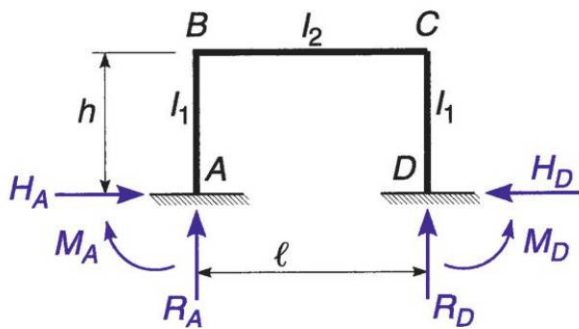


Figure 5.120

$$k = \frac{I_2}{I_1} \cdot \frac{h}{\ell}$$

Charge concentrée

$$\alpha = \frac{a}{\ell}$$

$$R_A = P(1 - \alpha) \frac{6k + 1 + \alpha - 2\alpha^2}{6k + 1}$$

$$R_D = P\alpha \frac{6k + 3\alpha - 2\alpha^2}{6k + 1}$$

$$H_A = H_D = \frac{3Pab}{2h\ell(k + 2)}$$

$$M_A = \frac{Pab}{2\ell} \frac{5k - 1 + 2\alpha(k + 2)}{(k + 2)(6k + 1)} \quad M_D = \frac{Pab}{2\ell} \frac{3 + 7k - 2\alpha(k + 2)}{(k + 2)(6k + 1)}$$

$$M_B = M_A - Hh \quad M_C = M_D - Hh \quad M_P = M_A - Hh + R_A a$$

$$\text{Si } a = b = \frac{\ell}{2} \quad R_A = R_D = \frac{P}{2} \quad H_A = H_D = \frac{3P\ell}{8h(k + 2)}$$

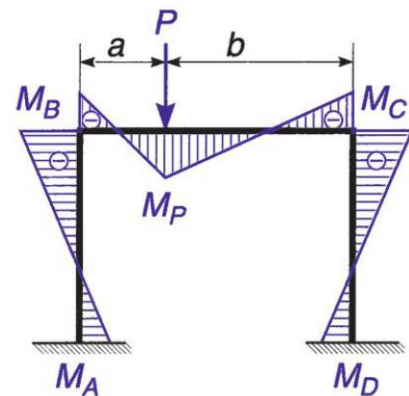


Figure 5.121

Charge uniformément répartie

$$R_A = R_D = \frac{p\ell}{2}$$

$$H_A = H_D = \frac{p\ell^2}{4h(k+2)}$$

$$M_A = M_D = \frac{p\ell^2}{12(k+2)}$$

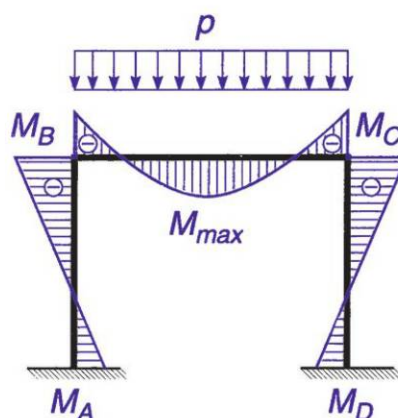


Figure 5.122

$$M_B = M_C = -\frac{p\ell^2}{6(k+2)} \quad M_{\max} = \frac{p\ell^2}{24} \cdot \frac{3k+2}{k+2}$$

Force horizontale au niveau de la traverse

$$R_D = -R_A = \frac{3Fh}{\ell} \cdot \frac{k}{6k+1}$$

$$H_A = -H_D = -\frac{F}{2}$$

$$M_A = -M_D = -\frac{Fh}{2} \cdot \frac{3k+1}{6k+1}$$

$$M_B = -M_C = \frac{Fh}{2} \cdot \frac{3k}{6k+1}$$

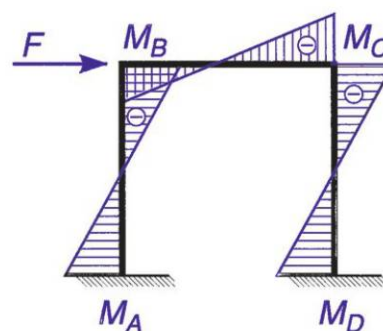


Figure 5.123

Force horizontale uniformément répartie

$$R_D = -R_A = \frac{fh^2}{\ell} \cdot \frac{k}{6k+1}$$

$$H_D = \frac{fh}{8} \cdot \frac{2k+3}{k+2}$$

$$H_A = -fh + H_D$$

$$M_A = -\frac{fh^2}{4} \left[\frac{k+3}{6(k+2)} + \frac{4k+1}{6k+1} \right]$$

$$M_D = \frac{fh^2}{4} \left[-\frac{k+3}{6(k+2)} + \frac{4k+1}{6k+1} \right]$$

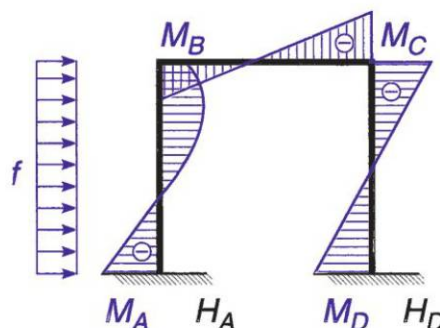


Figure 5.124

$$M_B = \frac{fb^2}{4} \left[-\frac{k}{6(k+2)} + \frac{2k}{6k+1} \right] \quad M_C = -\frac{fb^2}{4} \left[-\frac{k}{6(k+2)} + \frac{2k}{6k+1} \right]$$

Élévation de température : allongement unitaire αt

$$\begin{aligned} R_A &= R_D = 0 \\ H_A &= H_D = \frac{3EI_2\alpha t}{h^2} \cdot \frac{2k+1}{k(k+2)} \\ M_A &= M_D = \frac{3EI_2\alpha t}{h} \cdot \frac{k+1}{k(k+2)} \\ M_B &= M_C = -\frac{3EI_2\alpha t}{h} \cdot \frac{1}{k+2} \end{aligned}$$

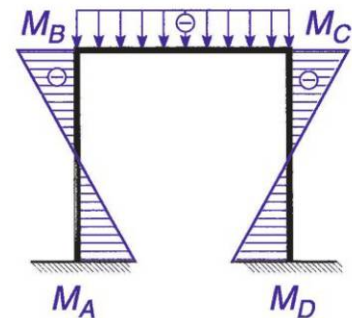


Figure 5.125

5

■ Cas 5 : portique articulé, à traverse brisée

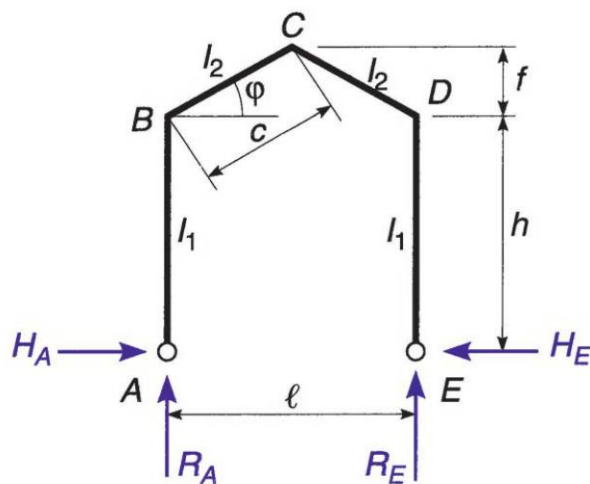


Figure 5.126

$$k = \frac{I_2}{I_1} \cdot \frac{h}{c}$$

$$\chi = h^2(k+3) + f(3h+f)$$

Charge concentrée

$$R_A = \frac{Pb}{\ell} \quad R_E = \frac{Pa}{\ell}$$

$$H_A = H_E = \frac{Pa}{4\ell^2} \cdot \frac{6hb\ell + f(3\ell^2 + 4a^2)}{\chi}$$

$$M_B = M_D = -Hh$$

$$M_P = R_A a - H \left(h + \frac{2fa}{\ell} \right)$$

$$M_C = \frac{Pa}{2} - H(h + f)$$

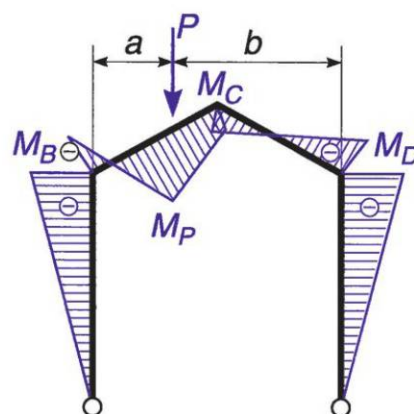


Figure 5.127

Charge verticale uniformément répartie, sur un seul versant

$$R_A = \frac{3p\ell}{8} \quad R_E = \frac{p\ell}{8}$$

$$H_A = H_E = \frac{p\ell^2}{64} \cdot \frac{8h + 5f}{\chi}$$

$$M_B = M_D = -Hh$$

$$M_C = R_E \frac{\ell}{2} - H(h + f)$$

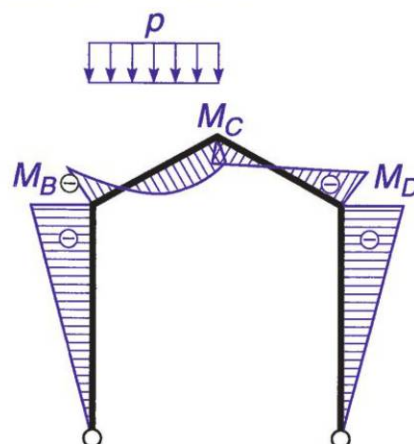


Figure 5.128

Charge verticale uniformément répartie, complète

$$R_A = R_E = \frac{p\ell}{2}$$

$$H_A = H_E = \frac{p\ell^2}{32} \cdot \frac{8h + 5f}{\chi}$$

$$M_B = M_D = -Hh$$

$$M_C = \frac{p\ell^2}{8} - H(h + f)$$

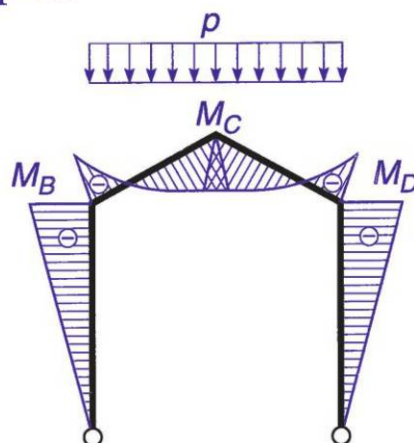


Figure 5.129

Force horizontale concentrée

$$R_E = -R_A = \frac{Fh}{\ell}$$

$$H_E = \frac{Fh}{4} \cdot \frac{2hk + 3(2h + f)}{\chi}$$

$$H_A = -F + H_E$$

$$M_B = (F - H_E)h$$

$$M_D = -H_E h$$

$$M_C = \frac{Fh}{2} - H_E(h + f)$$

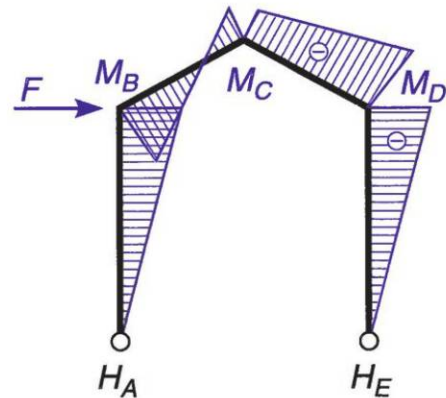


Figure 5.130

Force horizontale uniformément répartie

$$R_E = -R_A = \frac{ph^2}{2\ell}$$

$$H_E = \frac{ph^2}{16} \cdot \frac{5hk + 6(2h + f)}{\chi}$$

$$H_A = -ph + H_E$$

$$M_B = \frac{ph^2}{2} - H_E h$$

$$M_D = -H_E h$$

$$M_C = \frac{ph^2}{4} - H_E(h + f)$$

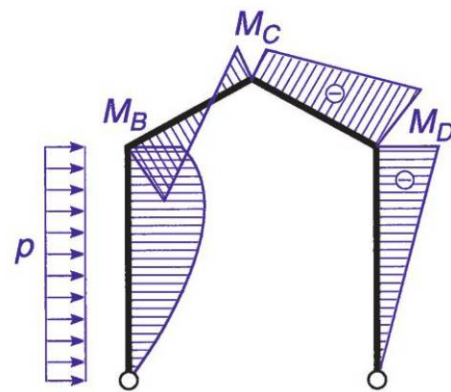


Figure 5.131

Élévation de température : allongement unitaire αt

$$R_A = R_E = 0$$

$$H_A = H_E = \frac{3EI_2 \alpha t \cos \varphi}{\chi}$$

$$M_B = M_D = -Hh$$

$$M_C = -H(h + f)$$

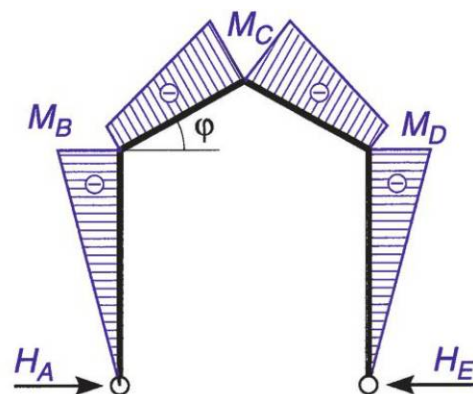


Figure 5.132

■ Cas 6 : cadres fermés

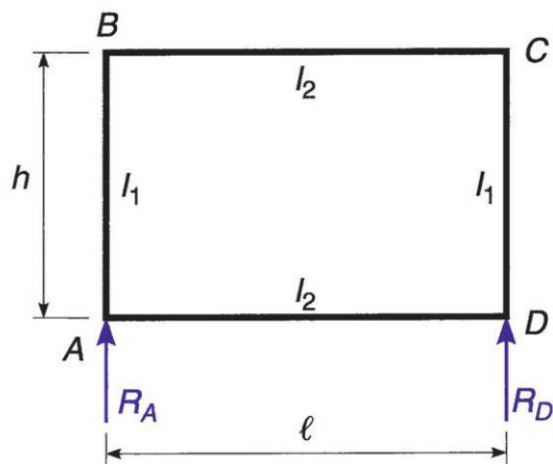


Figure 5.133

Chargement symétrique

$$k = \frac{I_2}{I_1} \cdot \frac{h}{\ell}$$

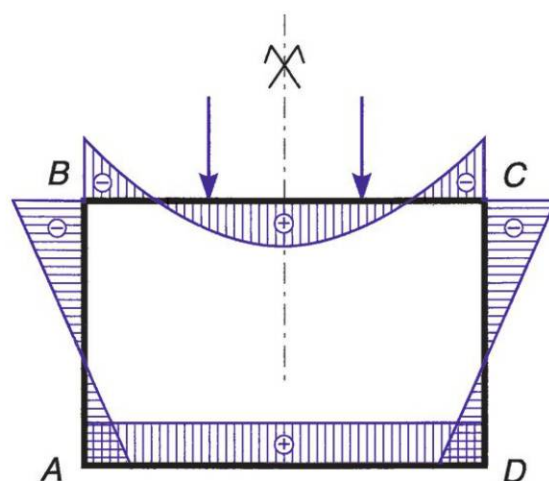


Figure 5.134

Sur l'appui B désignons par t_B et m_B l'effort tranchant et le moment de flexion dus au chargement appliqué sur la barre BC supposée parfaitement encastree (paragraphe 5.1.3)

$$R_A = R_D = t_B$$

$$M_B = M_C = m_B \frac{2k + 3}{(k + 3)(k + 1)}$$

$$M_A = M_D = -m_B \frac{k}{(k + 3)(k + 1)}$$

Chargement symétrique opposé

$$M_A = M_B = M_C = M_D = \frac{m_B}{k+1}$$

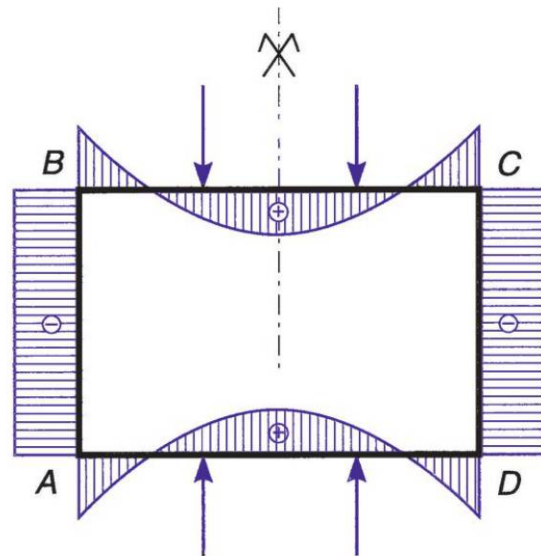


Figure 5.135

Chargements symétriques auto-équilibrés

Désignons par m_A et m_B les moments de flexion en A et B dus aux chargements des barres AB et BC supposées parfaitement encastrées.

$$M_A = M_B = M_C = M_D = \frac{m_A k + m_B}{k + 1}$$

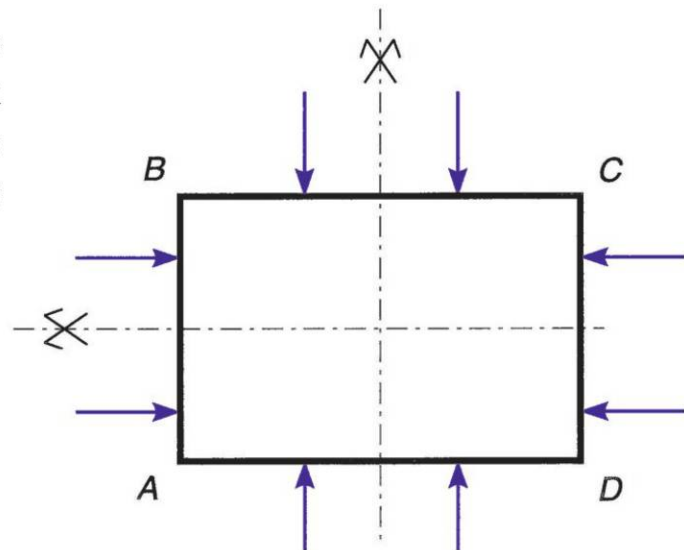


Figure 5.136

Cas particulier $I_1 = I_2$

$$M_A = M_B = M_C = M_D = \frac{m_A h + m_B \ell}{h + \ell}$$

Si de plus $h = \ell$

$$M_A = M_B = M_C = M_D = \frac{m_A + m_B}{2}$$

Chargement antisymétrique

Sur l'appui B désignons par t_B et m_B l'effort tranchant et le moment de flexion dus au chargement appliqué sur la barre BC supposée parfaitement encastree (paragraphe 5.1.3).

$$M_B = -M_C = m_B \frac{2k + 1}{(k + 1)(3k + 1)}$$

$$M_A = -M_D = -m_B \frac{k}{(k + 1)(3k + 1)}$$

$$R_A = -R_D = t_B + \frac{2M_B}{\ell}$$

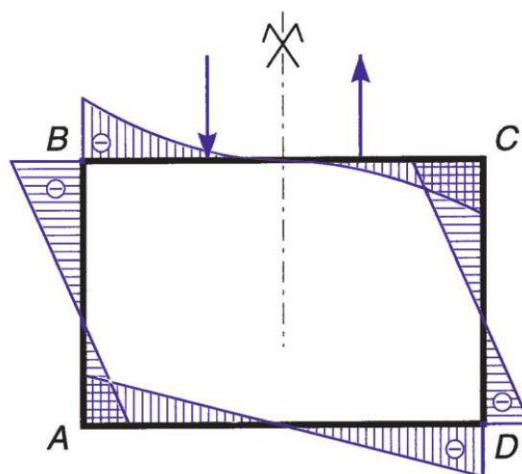


Figure 5.137

Chargement antisymétrique opposé

$$M_A = M_B = -M_C = -M_D = \frac{m_B}{3k + 1}$$

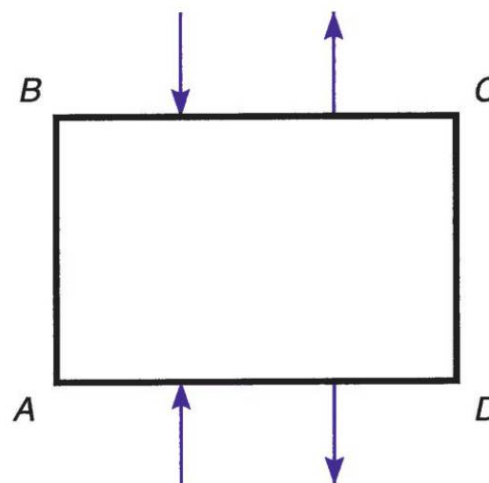


Figure 5.138

5.8 Arcs hyperstatiques

Relations de Bresse

Pour le calcul de ces arcs, on utilise les formules de Bresse (3.11) à (3.13) dans lesquelles on introduit l'abscisse ξ au lieu de l'abscisse curviligne s , en substituant aux valeurs réelles des caractéristiques de la section courante, les valeurs réduites suivantes :

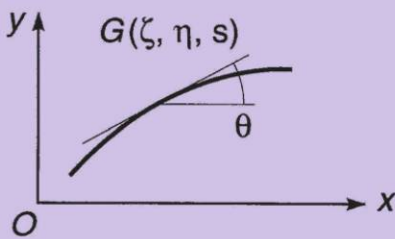


Figure 5.139

section réduite relative à la déformation d'effort normal :

$$\Omega' = \Omega \cos \theta$$

section réduite relative à la déformation d'effort tranchant :

$$\Omega'_1 = \Omega_1 \cos \theta$$

moment quadratique réduit :

$$I' = I \cos \theta$$

Les formules de Bresse s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} u(x) = u_0 - \varphi_0(y - y_0) - \int_{x_0}^x \frac{M(y - \eta)}{EI'} d\xi - \int_{x_0}^x \frac{N \cos \theta}{E\Omega'} d\xi \\ + \int_{x_0}^x \frac{V \sin \theta}{G\Omega'_1} d\xi + \alpha t(x - x_0) \end{aligned} \quad (5.56)$$

$$\begin{aligned} v(x) = v_0 + \varphi_0(x - x_0) + \int_{x_0}^x \frac{M(x - \xi)}{EI'} d\xi - \int_{x_0}^x \frac{N \sin \theta}{E\Omega'} d\xi \\ - \int_{x_0}^x \frac{V \cos \theta}{G\Omega'_1} d\xi + \alpha t(y - y_0) \end{aligned} \quad (5.57)$$

$$\varphi(x) = \varphi_0 + \int_{x_0}^x \frac{M}{EI'} d\xi \quad (5.58)$$

5.8.1 Arc à deux articulations

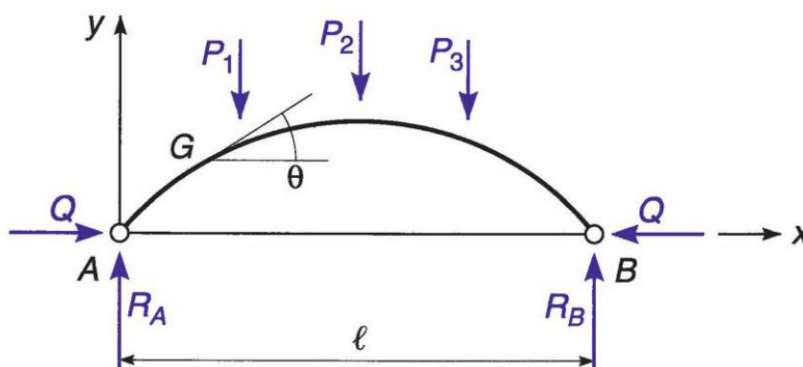


Figure 5.140

■ Action des charges verticales

Comme dans l'arc à trois articulations, les composantes verticales R_A et R_B des réactions d'appui en A et B, sont égales aux réactions d'appui de la poutre sur appuis simples, de portée AB, soumise aux mêmes charges verticales que l'arc.

La seule inconnue hyperstatique est la poussée Q; elle est déterminée au moyen de la formule (5.56) de Bresse, en écrivant que la distance AB est invariable.

$$\int_0^\ell \frac{My}{EI'} dx - \int_0^\ell \frac{N \cos \theta}{E\Omega'} dx + \int_0^\ell \frac{V \sin \theta}{G\Omega'_1} dx = 0$$

En remplaçant M , N et V par leurs expressions (4.6), (4.8) et (4.9) et en faisant $E\Omega' = G\Omega'_1$, ce qui est admissible en raison de la faible influence de la déformation tranchant, on obtient :

$$Q = \frac{\gamma}{D} \int_0^\ell \frac{\mu y}{EI'} dx \quad (5.59)$$

avec
$$D = \int_0^\ell \frac{y^2 dx}{EI'} \quad d = \int_0^\ell \frac{dx}{E\Omega'} \quad \gamma = \frac{D}{D + d}$$

et μ étant le moment de flexion dans la poutre sur appuis simples AB soumise aux mêmes charges que l'arc.

γ est le terme de Bresse, toujours voisin de 1 ; ce terme prend même la valeur 1 si le raccourcissement de l'arc sous effort normal est négligé.

■ Influence de la température ou d'un éloignement des appuis

Un accroissement de température qui conduirait, en cas de dilatation non gênée, à un allongement $\alpha t \ell$ par unité de longueur suivant AB donne une poussée :

$$Q = \frac{\alpha t \ell}{D + d} \quad (5.60)$$

Si les appuis s'écartent de la quantité δ , on a de même :

$$Q = -\frac{\delta}{D + d} \quad (5.61)$$

Pour un arc dont la poussée est équilibrée par un tirant, on peut tenir compte de l'allongement de ce tirant en remplaçant la section Ω' par une section fiction Ω_f telle que :

$$\frac{1}{E\Omega_f} = \frac{1}{E\Omega'} + \frac{1}{E_T\Omega_T} \quad (5.62)$$

E_T étant le module d'élasticité du tirant et Ω_T sa section.

5.8.2 Arc encastré

Les inconnues hyperstatiques sont au nombre de trois ; on choisit habituellement comme inconnues les composantes R_A et Q de la réaction de l'appui de gauche, et le moment $\mathcal{M}$ de cette réaction par rapport à l'origine des coordonnées.

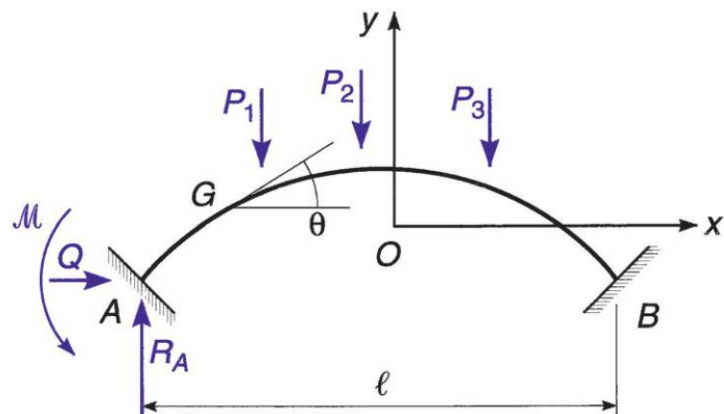


Figure 5.141

Dans le cas d'un arc symétrique, il est pratique de choisir comme origine des coordonnées le centre élastique O de l'arc, dont les coordonnées par rapport à A sont :

$$X_0 = \frac{\ell}{2} \quad Y_0 = \frac{\int_0^\ell \frac{y dx}{EI'}}{\int_0^\ell \frac{dx}{EI'}} \quad (5.63)$$

■ Cas des charges verticales

Les équations tirées des formules de Bresse et fournissant les inconnues hyperstatiques, sont les suivantes (toujours avec $E\Omega' = G\Omega'_1$ et μ étant le moment de flexion dans la poutre isostatique).

$$\mathcal{M} \int_0^\ell \frac{dx}{EI'} = - \int_0^\ell \frac{\mu dx}{EI'} \quad (5.64)$$

$$Q \left[\int_0^\ell \frac{y^2 dx}{EI'} + \int_0^\ell \frac{dx}{E\Omega'} \right] = \int_0^\ell \frac{\mu y dx}{EI'} \quad (5.65)$$

$$R_A \left[\int_0^\ell \frac{x^2 dx}{EI'} + \int_0^\ell \frac{dx}{E\Omega'} \right] = \int_0^\ell \frac{\mu x dx}{EI'} \quad (5.66)$$

En un point $G(x, y)$ de la fibre moyenne, où la tangente fait un angle θ avec l'horizontale, les expressions de M , N et V sont :

$$M = \mu + \mathcal{M} + R_A x - Qy \quad (5.67)$$

$$N = \left(\frac{d\mu}{dx} + R_A \right) \sin \theta + Q \cos \theta \quad (5.68)$$

$$V = \left(\frac{d\mu}{dx} + R_A \right) \cos \theta - Q \sin \theta \quad (5.69)$$

■ Influence d'une variation linéaire (αt) par unité de longueur

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= 0 & R_A &= 0 \\ Q \left[\int_0^\ell \frac{y^2 dx}{EI'} + \int_0^\ell \frac{dx}{E\Omega'} \right] &= \alpha t \ell \end{aligned} \quad (5.70)$$

5.8.3 Bow-string

Définition

Une poutre **bow-string** est constituée de deux arcs réunis aux naissances, solidarisés par des montants (ou suspentes) qu'on suppose articulés, de longueur invariable et infiniment rapprochés. L'arc inférieur est appelé tirant.

Les appuis A et B sont des appuis simples. On considère le cas des charges verticales.

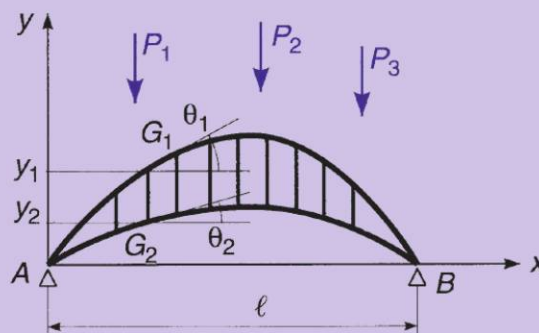


Figure 5.142

Q_1 et Q_2 désignant les poussées à l'appui A pour chacun des arcs AG_1B et AG_2B , on a :

$$Q_1 = -Q_2 = Q \quad (5.71)$$

$$M = \mu - Q(y_1 - y_2)$$

On pose d'autre part :

$$y = y_1 - y_2 \quad I' = I'_1 + I'_2 \quad \frac{1}{\Omega'} = \frac{1}{\Omega'_1} + \frac{1}{\Omega'_2}$$

(les indices 1 et 2 sont relatifs, respectivement aux arcs AG_1B et AG_2B).

L'équation qui donne la poussée Q est :

$$Q \left[\int_0^\ell \frac{y^2 dx}{EI'} + \int_0^\ell \frac{dx}{E\Omega'} \right] = \int_0^\ell \frac{\mu y dx}{EI'} \quad (5.72)$$

Les efforts dans les deux arcs AG_1B et AG_2B sont :

$$M_1 = M \frac{I'_1}{I'} \quad M_2 = M \frac{I'_2}{I'} \quad (5.73)$$

$$N_1 = \frac{dM_1}{dx} \sin \theta_1 - \frac{Q}{\cos \theta_1} \quad N_2 = \frac{dM_2}{dx} \sin \theta_2 - \frac{Q}{\cos \theta_2} \quad (5.74)$$

$$V_1 = \frac{dM_1}{dx} \cos \theta_1 \quad V_2 = \frac{dM_2}{dx} \cos \theta_2 \quad (5.75)$$

5.8.4 Formulaire des arcs paraboliques

Arcs paraboliques

La fibre moyenne est caractérisée par :

$$y = \frac{4f}{\ell^2} x(\ell - x)$$

$$\text{et } \theta = \frac{4f}{\ell} \left(1 - \frac{2x}{\ell} \right)$$

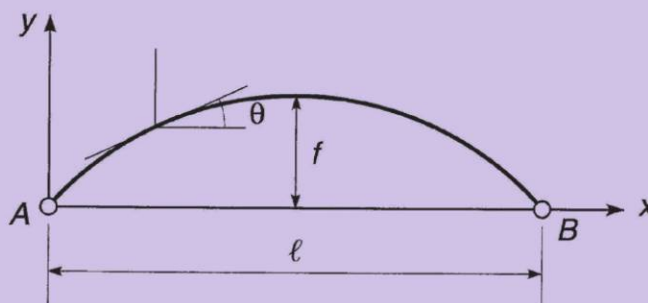


Figure 5.143

Par ailleurs, les moments quadratiques réduites I' et les sections réduites Ω' sont supposées constantes.

■ Cas 1 : Charge uniformément répartie

$$R_A = R_B = \frac{p\ell}{2}$$

$$Q_A = Q_B = \frac{p\ell^2}{8f \left(1 + \frac{15I'}{8\Omega' f^2} \right)}$$

$$N = p \left(\frac{\ell}{2} - x \right) \sin \theta + Q_A \cos \theta$$

$$M = \frac{px(\ell - x)}{2} - Q_A y$$

$$V = p \left(\frac{\ell}{2} - x \right) \cos \theta - Q_A \sin \theta$$

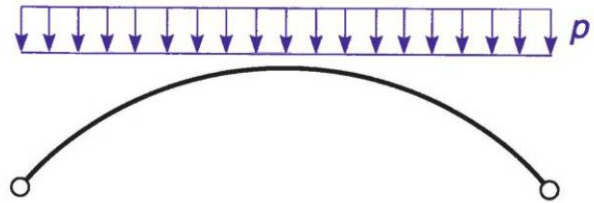


Figure 5.144

■ Cas 2 : Charge concentrée verticale

$$R_A = \frac{P(\ell - a)}{\ell}$$

$$R_B = \frac{Pa}{\ell}$$

$$Q_A = Q_B = \frac{5Pa \left(1 - \frac{a}{\ell} \right) \left(1 + \frac{a}{\ell} - \frac{a^2}{\ell^2} \right)}{8f \left(1 + \frac{15I'}{8\Omega' f^2} \right)}$$

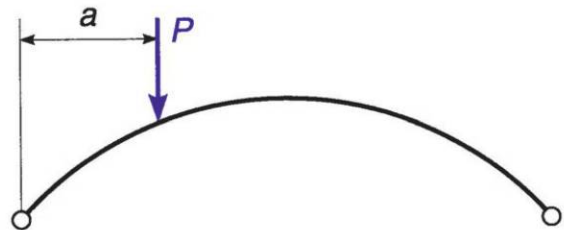


Figure 5.145

Pour $0 < x < a$

$$N = \frac{P(\ell - a)}{\ell} \sin \theta + Q_A \cos \theta$$

$$M = \frac{P(\ell - a)}{\ell} x - Q_A y$$

$$V = \frac{P(\ell - a)}{\ell} \cos \theta - Q_A \sin \theta$$

Pour $a < x < \ell$

$$N = -\frac{Pa}{\ell} \sin \theta + Q_A \cos \theta$$

$$M = \frac{Pa}{\ell} (\ell - x) - Q_A y$$

$$V = -\frac{Pa}{\ell} \cos \theta - Q_A \sin \theta$$

■ **Cas 3 : Charge uniformément répartie partielle**

$$R_A = \frac{3p\ell}{8} \quad R_B = \frac{p\ell}{8}$$

$$Q_A = Q_B = \frac{p\ell^2}{16f \left(1 + \frac{15I'}{8\Omega' f^2} \right)}$$

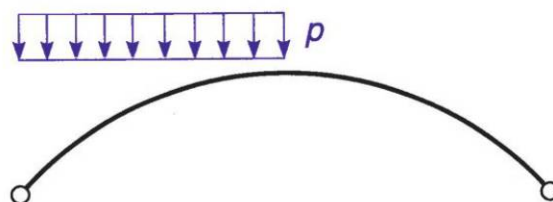


Figure 5.146

Pour $0 < x < \frac{\ell}{2}$

$$N = p \left(\frac{3\ell}{8} - x \right) \sin \theta + Q_A \cos \theta$$

$$M = \frac{px}{2} \left(\frac{3\ell}{4} - x \right) - Q_A y$$

$$V = p \left(\frac{3\ell}{8} - x \right) \cos \theta - Q_A \sin \theta$$

Pour $\frac{\ell}{2} < x < \ell$

$$N = -\frac{p\ell}{8} \sin \theta + Q_A \cos \theta$$

$$M = \frac{p\ell}{8} (\ell - x) - Q_A y$$

$$V = -\frac{p\ell}{8} \cos \theta - Q_A \sin \theta$$

■ Cas 4 : Charge concentrée horizontale

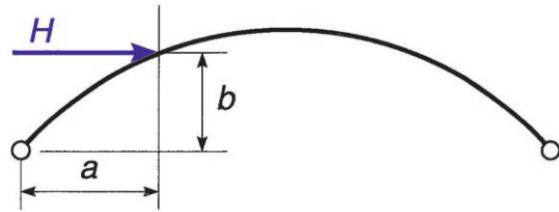


Figure 5.147

$$R_A = -R_B = -\frac{bH}{\ell}$$

$$Q_A = -\frac{H}{2} \left(1 - \frac{a}{\ell} \right) \left(2 - \frac{3a}{\ell} + \frac{2a^2}{\ell^2} + \frac{12a^3}{\ell^3} - \frac{8a^4}{\ell^4} \right) \frac{1}{1 + \frac{15I'}{8\Omega' f^2}}$$

$$Q_B = H + Q_A$$

Pour $0 < x < a$

$$N = -\frac{bH}{\ell} \sin \theta + Q_A \cos \theta$$

$$M = -\frac{bHx}{\ell} - Q_A y$$

$$V = -\frac{bH}{\ell} \cos \theta - Q_A \sin \theta$$

Pour $a < x < \ell$

$$N = -\frac{bH}{\ell} \sin \theta + Q_B \cos \theta$$

$$M = -\frac{bHx}{\ell} - H(y - b) - Q_A y$$

$$V = -\frac{bH}{\ell} \cos \theta - Q_B \sin \theta$$

5.8.5 Formulaire des arcs circulaires

I et Ω représentent respectivement le moment quadratique et l'aire de la section droite supposée constante.

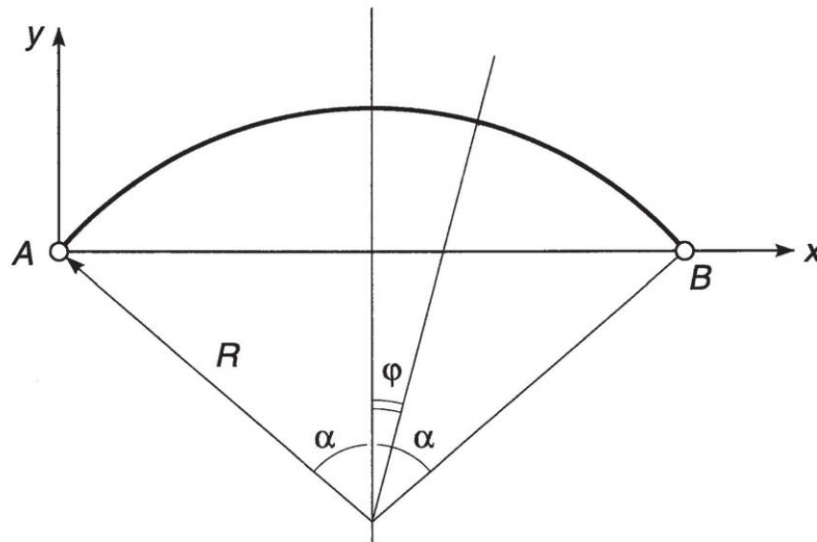


Figure 5.148

On pose
$$\gamma = \frac{1}{1 + \frac{I}{R^2 \Omega} \times \frac{4\alpha}{2\alpha - 3 \sin 2\alpha + 4\alpha \cos^2 \alpha}}$$

■ **Cas 1 : charge uniformément répartie le long de la fibre moyenne**

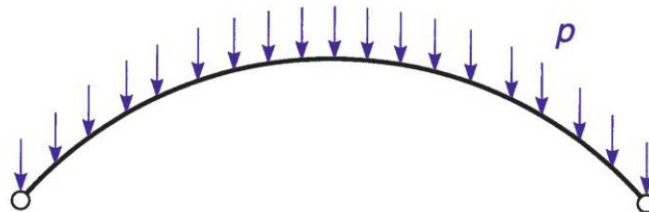


Figure 5.149

$$R_A = R_B = pR\alpha$$

$$Q_A = Q_B = \frac{pR}{2} \times \frac{(9 - 4\alpha^2)\sin 2\alpha - 10\alpha \cos 2\alpha - 8\alpha}{2\alpha - 3\sin 2\alpha + 4\alpha \cos^2 \alpha} \gamma$$

$$N = pR\varphi \sin \varphi + Q_A \cos \varphi$$

$$M = pR^2(\alpha \sin \alpha - \varphi \sin \varphi + \cos \alpha - \cos \varphi) - Q_A R(\cos \varphi - \cos \alpha)$$

$$V = -pR\varphi \cos \varphi + Q_A \sin \varphi$$

■ Cas 2 : charge horizontale constante par unité de longueur de ligne moyenne



Figure 5.150

$$R_A = -R_B = -pR(1 - \alpha \cot \alpha)$$

$$Q_A = -Q_B = -pR\alpha$$

$$N = pR(\sin \varphi + \varphi \cos \alpha - \alpha \cot \alpha \sin \varphi)$$

$$M = pR^2(\alpha \cot \alpha \sin \varphi - \varphi \cos \varphi)$$

$$V = pR(\alpha \cot \alpha \cos \varphi + \varphi \sin \varphi - \cos \varphi)$$

■ Cas 3 : charge horizontale constante par unité de longueur de ligne moyenne (distribution symétrique)



Figure 5.151

$$R_A = R_B = 0$$

$$Q_A = Q_B = \frac{pR}{2} \times \frac{\alpha^2 - 1 - 8 \cos \alpha + 2\alpha \sin 2\alpha + 9 \cos^2 \alpha + \frac{2\alpha^2 I}{R^2 \Omega}}{\alpha - \frac{3}{2} \sin 2\alpha + 2\alpha \cos^2 \alpha} \gamma$$

$$N = [Q_A - pR(\alpha - \varphi)] \cos \varphi$$

$$M = pR^2[(\alpha - \varphi) \cos \varphi - \sin \alpha + \sin \varphi] - Q_A R (\cos \varphi - \cos \alpha)$$

$$V = [Q_A - pR(\alpha - \varphi)] \sin \varphi$$

■ Cas 4 : Charge horizontale concentrée

$$R_A = -R_B = -\frac{P(\cos \beta - \cos \alpha)}{2 \sin \alpha}$$

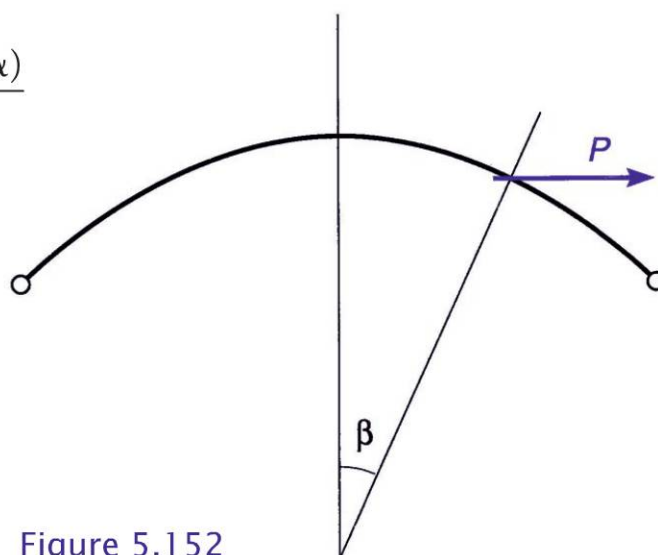


Figure 5.152

$$Q_A = \frac{-P \cos \alpha \sin \beta + \frac{\sin 2\beta - 3 \sin 2\alpha}{4}}{\alpha - \frac{3}{2} \sin 2\alpha + 2\alpha \cos^2 \alpha} \gamma$$

$$+ \frac{\frac{\alpha - \beta}{2} + \alpha \cos^2 \alpha - \beta \cos \beta \cos \alpha + \frac{I}{R^2 \Omega} (\alpha - \beta)}{\alpha - \frac{3}{2} \sin 2\alpha + 2\alpha \cos^2 \alpha} \gamma$$

$$Q_B = H + Q_A$$

Pour $-\alpha < \varphi < \beta$

$$N = -R_A \sin \varphi + Q_A \cos \varphi$$

$$M = \frac{PR}{2 \sin \alpha} (\cos \alpha - \cos \beta) (\sin \alpha + \sin \varphi) - Q_A R (\cos \varphi - \cos \alpha)$$

$$V = R_A \cos \varphi + Q_A \sin \varphi$$

Pour $\beta < \varphi < \alpha$

$$N = -R_A \sin \varphi - Q_B \cos \varphi$$

$$M = \frac{PR}{2 \sin \alpha} [2 \sin \alpha (\cos \beta - \cos \varphi) - (\cos \beta - \cos \alpha) (\sin \alpha + \sin \varphi)] - Q_A R (\cos \varphi - \cos \alpha)$$

$$V = R_A \cos \varphi - Q_B \sin \varphi$$

■ Cas 5 : Variation uniforme de température Δt

On désigne par a le coefficient de dilatation thermique.

$$R_A = R_B = 0$$

$$Q_A = Q_B = \frac{2EI}{R^2} \times a \Delta t \times \frac{\sin \alpha}{\alpha - \frac{3}{2} \sin 2\alpha + 2\alpha \cos^2 \alpha} \gamma$$

$$N = Q_A \cos \varphi$$

$$M = -Q_A R (\cos \varphi - \cos \alpha)$$

$$V = Q_A \sin \varphi$$

Déplacement vertical de la clé :

$$v = Ra \Delta t (1 - \cos \alpha) + Q_A \frac{R^3}{EI} \left(\cos \alpha - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \cos 2\alpha - \frac{\alpha \sin \alpha}{2} \right)$$

■ **Cas 6 : Gradient de température Δt entre faces supérieure et inférieure (hauteur de la section, h)**

Δt est compté positif si la face supérieure est la plus chaude.

$$R_A = R_B = 0$$

$$Q_A = Q_B = -\frac{2EIa\Delta t}{Rh} \times \frac{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{\frac{\alpha}{2} - \frac{3}{4}\sin 2\alpha + \alpha \cos^2 \alpha} \gamma$$

$$N = Q_A \cos \varphi$$

$$M = -Q_A R (\cos \varphi - \cos \alpha)$$

$$V = -Q_A \sin \varphi$$

Déplacement vertical de la clé :

$$v = \frac{R^2 a \Delta t}{h} (\alpha \sin \alpha + \cos \alpha - 1) + Q_A \frac{R^3}{EI} \left(\cos \alpha - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \cos 2\alpha - \frac{\alpha \sin 2\alpha}{2} \right)$$

6

Plaques

6.1 Formules fondamentales

Définitions et notations

On appelle **plaque** un solide limité par deux plans parallèles et par une surface fermée qui définit les bords ; l'épaisseur constante h de la plaque est supposée faible par rapport aux autres dimensions.

Toutes les forces, charges et réactions, sont appliquées normalement à la plaque. La plaque est repérée dans un système d'axes $Oxyz$, le plan Oxy étant confondu avec le plan moyen de la plaque.

Notations utilisées :

z : déformation du plan moyen de la plaque (flèche) ;

ν : coefficient de poisson ;

h : épaisseur de la plaque ;

E : module d'élasticité ;

D : coefficient de raideur de la plaque.

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (6.1)$$

pour une bande de largeur unité parallèle à l'axe Ox ou à l'axe Oy :

M_x, M_y moments de flexion ;

V_x, V_y efforts tranchants ;

R_x, R_y réactions d'appui ;

M_{yx} moment de torsion.

Expressions des moments en fonction des courbures :

$$\left. \begin{aligned} M_x &= D \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) & M_y &= D \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) \\ M_{yx} &= D(1 - \nu) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

Expressions des efforts tranchants :

$$V_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \quad V_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} \quad (6.3)$$

Expressions des réactions d'appui :

$$R_x = V_x + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \quad R_y = V_y + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} \quad (6.4)$$

En écrivant l'équilibre d'un petit élément de plaque de côtés infiniment petits dx et dy , et soumis à une densité de charge q , on obtient l'équation (Lagrange/Sophie Germain) :

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (6.5)$$

L'étude d'une plaque soumise à une densité de charge $q(x, y)$, se ramène donc à l'intégration de l'équation (6.5), en satisfaisant les conditions aux limites (appuis, bords libres...).

Remarque

Les valeurs numériques des tableaux qui suivent ont été établies en supposant $\nu = 0,3$ (cas de l'acier).

Désignons par M_x , M_y et z les moments et la flèche obtenus avec $\nu = 0,3$; pour d'autres valeurs de ν , on a :

$$\left. \begin{aligned} M'_x(\nu) &= 1,1[(1 - 0,3\nu)M_x - (0,3 - \nu)M_y] \\ M'_y(\nu) &= 1,1[(1 - 0,3\nu)M_y - (0,3 - \nu)M_x] \\ z'(\nu) &= 1,1(1 - \nu^2)z \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

Cas particulier de $\nu = 0$

$$M'_x = 1,1M_x - 0,33M_y$$

$$M'_y = 1,1M_y - 0,33M_x$$

$$z' = 1,1z$$

Cas particulier de $\nu = 0,2$

$$M'_x = 1,03M_x - 0,11M_y$$

$$M'_y = 1,03M_y - 0,11M_x$$

$$z' = 1,06z$$

6.2 Plaques rectangulaires

Principe de la résolution

L'expression de la fonction z résultant de l'intégration de l'équation (6.5) ne peut être explicitée que dans le cas particulier d'une charge répartie sur la surface, répondant à l'expression :

$$q = q_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Dans les autres cas, Navier a proposé d'écrire la fonction de charge sous la forme d'une double série trigonométrique :

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

permettant d'utiliser les résultats (paragraphe 6.2.1) du chargement précédent dans des développements en série. Les résultats se présentent alors sous forme de formules approchées ou de tableaux de valeurs numériques (paragraphe 6.2.2). Dans chaque angle, existe une réaction S empêchant le soulèvement des angles (ne pas confondre avec la notation précédente S d'une section droite).

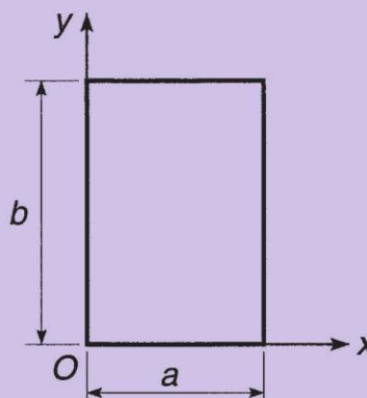


Figure 6.1

6.2.1 Chargement sinusoïdal

$$q(x, y) = q_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Moments de flexion maximaux au centre :

$$M_x = \frac{q_0}{\pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \left(\frac{m^2}{a^2} + \nu \frac{n^2}{b^2} \right) \quad M_y = \frac{q_0}{\pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \left(\frac{n^2}{b^2} + \nu \frac{m^2}{a^2} \right)$$

Efforts tranchants et réactions maximaux aux milieux des côtés :

$$V_x = \frac{q_0}{\pi a \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \quad V_y = \frac{q_0}{\pi b \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}$$

$$R_x = \frac{q_0}{\pi a \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \left(\frac{m^2}{b^2} + (2 - \nu) \frac{n^2}{b^2} \right) \quad R_y = \frac{q_0}{\pi b \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \left(\frac{n^2}{b^2} + (2 - \nu) \frac{m^2}{a^2} \right)$$

Réactions dans les angles :

$$S = - \frac{2q_0 (1 - \nu)}{\pi^2 ab \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}$$

Flèche maximale au centre :

$$z = - \frac{q_0}{\pi^4 D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)}$$

6.2.2 Formulaire des plaques rectangulaires

■ Cas 1 : plaque rectangulaire uniformément chargée, les quatre côtés en appuis simples

Levy et Estanave ont établi :

$$z = -\alpha \frac{pa^4}{Eh^3}$$

$$M_x = \beta pa^2 \quad M_y = \beta_1 pa^2$$

$$V_x = \gamma pa \quad V_y = \gamma_1 pa$$

$$R_x = \delta pa \quad R_y = \delta_1 pa$$

$$S = -npa^2$$

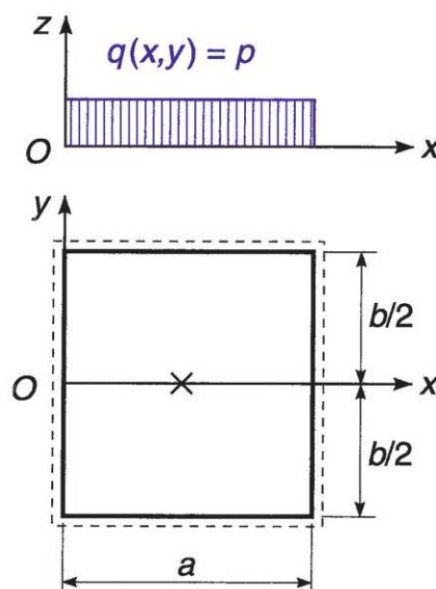


Figure 6.2

Tableau 6.1

b/a	α	β	β_1	γ	γ_1	δ	δ_1	ν
1,0	0,0443	0,0479	0,0479	0,338	0,338	0,420	0,420	0,065
1,1	0,0530	0,0553	0,0494	0,360	0,347	0,440	0,440	0,070
1,2	0,0616	0,0626	0,0501	0,380	0,353	0,455	0,453	0,074
1,3	0,0697	0,0693	0,0504	0,397	0,357	0,468	0,464	0,079
1,4	0,0770	0,0753	0,0506	0,411	0,361	0,478	0,471	0,083
1,5	0,0843	0,0812	0,0499	0,424	0,363	0,486	0,480	0,085
1,6	0,0906	0,0862	0,0493	0,435	0,365	0,491	0,485	0,086
1,7	0,0964	0,0908	0,0486	0,444	0,367	0,496	0,488	0,088
1,8	0,1017	0,0948	0,0479	0,452	0,368	0,499	0,491	0,090
1,9	0,1064	0,0985	0,0471	0,459	0,369	0,502	0,494	0,091
2,0	0,1106	0,1017	0,0464	0,465	0,370	0,503	0,496	0,092
3,0	0,1336	0,1189	0,0404	0,493	0,372	0,505	0,498	0,093
4,0	0,1400	0,1235	0,0384	0,498	0,372	0,502	0,500	0,094
5,0	0,1416	0,1246	0,0375	0,500	0,372	0,501	0,500	0,095
∞	0,1422	0,1250	0,0375	0,500	0,372	0,500	0,500	0,095

■ **Cas 2 : plaque rectangulaire soumise à une pression hydrostatique $p = p_0 \frac{x}{a}$, les quatre côtés en appuis simples**

Galerkin a établi :

Flèche pour $b > a$

$$z = -\alpha \frac{p_0 b^4}{Eh^3}$$

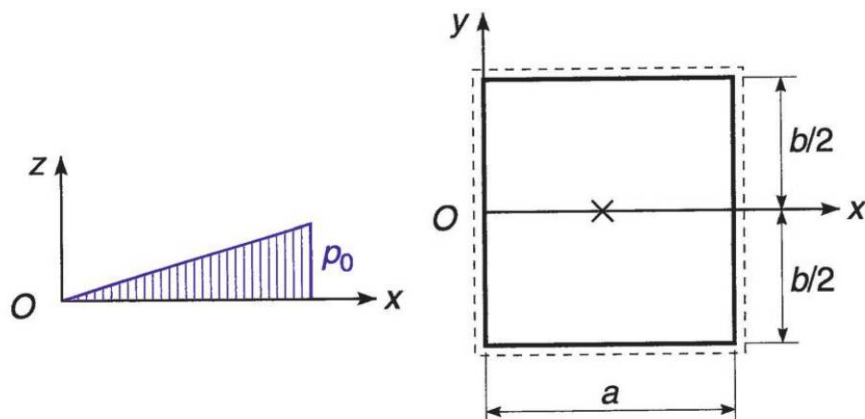


Figure 6.3

Tableau 6.2 Valeurs de α pour $y = 0$

b/a	$x = 0,25a$	$x = 0,50a$	$x = 0,60a$	$x = 0,75a$
1,0	0,0143	0,0221	0,0220	0,0177
1,1	0,0173	0,0265	0,0264	0,0210
1,2	0,0203	0,0308	0,0305	0,0241
1,3	0,0231	0,0348	0,0344	0,0271
1,4	0,0257	0,0385	0,0380	0,0298
1,5	0,0281	0,0421	0,0414	0,0323
1,6	0,0303	0,0453	0,0444	0,0346
1,7	0,0323	0,0482	0,0472	0,0366
1,8	0,0342	0,0508	0,0497	0,0385
1,9	0,0358	0,0532	0,0519	0,0402
2,0	0,0373	0,0553	0,0539	0,0417
3,0	0,0454	0,0668	0,0647	0,0498
4,0	0,0477	0,0700	0,0679	0,0521
5,0	0,0482	0,0708	0,0687	0,0527
∞	0,0484	0,0711	0,0690	0,0529

Flèche pour $b < a$
$$z = -\alpha \frac{p_0 b^4}{Eh^3}$$

Tableau 6.3 Valeurs de α pour $\gamma = 0$

a/b	$x = 0,25a$	$x = 0,50a$	$x = 0,60a$	$x = 0,75a$
∞	0,0355	0,0711	0,0853	0,1066
5,0	0,0355	0,0708	0,0850	0,1054
4,0	0,0355	0,0700	0,0820	0,0908
3,0	0,0350	0,0688	0,0756	0,0772
2,0	0,0315	0,0553	0,0592	0,0537
1,9	0,0307	0,0532	0,0566	0,0508
1,8	0,0295	0,0508	0,0536	0,0474
1,7	0,0285	0,0482	0,0506	0,0441
1,6	0,0272	0,0453	0,0472	0,0406
1,5	0,0256	0,0421	0,0436	0,0370
1,4	0,0238	0,0385	0,0397	0,0332
1,3	0,0217	0,0348	0,0355	0,0294
1,2	0,0195	0,0308	0,0312	0,0255
1,1	0,0167	0,0265	0,0268	0,0217
1,0	0,0143	0,0221	0,0220	0,0177

Tableau 6.4 Moments de flexion pour $b > a$

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \beta a^2 p_0 \\ M_y &= \beta_1 a^2 p_0 \end{aligned} \right\} \text{ pour } y = 0$$

b/a	Valeurs de β pour				Valeurs de β_1 pour			
	$x = 0,25a$	$x = 0,50a$	$x = 0,60a$	$x = 0,75a$	$x = 0,25a$	$x = 0,50a$	$x = 0,60a$	$x = 0,75a$
1,0	0,0132	0,0239	0,0264	0,0259	0,0149	0,0239	0,0245	0,0207
1,1	0,0156	0,0276	0,0302	0,0289	0,0155	0,0247	0,0251	0,0211
1,2	0,0179	0,0313	0,0338	0,0318	0,0158	0,0250	0,0254	0,0213
1,3	0,0200	0,0346	0,0371	0,0344	0,0160	0,0252	0,0255	0,0213
1,4	0,0221	0,0376	0,0402	0,0367	0,0160	0,0253	0,0254	0,0212
1,5	0,0239	0,0406	0,0429	0,0388	0,0159	0,0249	0,0252	0,0210
1,6	0,0256	0,0431	0,0454	0,0407	0,0158	0,0246	0,0249	0,0207
1,7	0,0272	0,0454	0,0476	0,0424	0,0155	0,0243	0,0246	0,0205
1,8	0,0286	0,0474	0,0496	0,0439	0,0153	0,0239	0,0242	0,0202
1,9	0,0298	0,0492	0,0513	0,0452	0,0150	0,0235	0,0238	0,0199
2,0	0,0309	0,0508	0,0529	0,0463	0,0148	0,0232	0,0234	0,0197
3,0	0,0369	0,0594	0,0611	0,0525	0,0128	0,0202	0,0207	0,0176
4,0	0,0385	0,0617	0,0632	0,0541	0,0120	0,0192	0,0196	0,0168
5,0	0,0389	0,0623	0,0638	0,0546	0,0118	0,0187	0,0193	0,0166
∞	0,0391	0,0625	0,0640	0,0547	0,0117	0,0187	0,0192	0,0165

Tableau 6.5 Moments de flexion pour $b < a$

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \beta b^2 p_0 \\ M_y &= \beta_1 b^2 p_0 \end{aligned} \right\} \text{ pour } y = 0$$

a/b	Valeurs de β pour				Valeurs de β_1 pour			
	$x = 0,25a$	$x = 0,50a$	$x = 0,60a$	$x = 0,75a$	$x = 0,25a$	$x = 0,50a$	$x = 0,60a$	$x = 0,75a$
∞	0,0094	0,0187	0,0225	0,0281	0,0312	0,0625	0,0750	0,0937
5,0	0,0094	0,0187	0,0230	0,0309	0,0312	0,0623	0,0742	0,0877
4,0	0,0094	0,0192	0,0237	0,0326	0,0312	0,0617	0,0727	0,0820
3,0	0,0096	0,0202	0,0256	0,0345	0,0309	0,0594	0,0678	0,0715
2,0	0,0108	0,0232	0,0285	0,0348	0,0284	0,0508	0,0554	0,0523
1,9	0,0111	0,0235	0,0288	0,0345	0,0278	0,0492	0,0553	0,0498
1,8	0,0115	0,0239	0,0291	0,0341	0,0269	0,0474	0,0509	0,0470
1,7	0,0117	0,0243	0,0293	0,0337	0,0261	0,0454	0,0485	0,0442
1,6	0,0120	0,0246	0,0294	0,0331	0,0251	0,0431	0,0457	0,0412
1,5	0,0123	0,0249	0,0294	0,0324	0,0239	0,0406	0,0428	0,0381
1,4	0,0126	0,0253	0,0292	0,0315	0,0225	0,0376	0,0396	0,0348
1,3	0,0129	0,0252	0,0290	0,0304	0,0209	0,0346	0,0360	0,0314
1,2	0,0131	0,0250	0,0284	0,0291	0,0192	0,0313	0,0323	0,0279
1,1	0,0134	0,0247	0,0276	0,0276	0,0169	0,0276	0,0285	0,0245
1,0	0,0132	0,0239	0,0264	0,0259	0,0149	0,0239	0,0245	0,0207

Tableau 6.6 Réactions pour $b < a$

$$R_x = \delta p_0 a \quad R_y = \delta_1 p_0 b$$

a/b	Valeurs de δ pour $x = 0$		Valeurs de δ pour $x = a$		Valeurs de δ_1 pour $y = \pm b/2$			
	$y = 0$	$y = 0,25b$	$y = 0$	$y = 0,25b$	$x = 0,25a$	$x = 0,50a$	$x = 0,60a$	$x = 0,75a$
∞	—	—	—	—	0,125	0,250	0,300	0,375
5,0	0,008	0,006	0,092	0,076	0,125	0,250	0,301	0,379
4,0	0,013	0,010	0,112	0,093	0,125	0,251	0,301	0,377
3,0	0,023	0,018	0,143	0,119	0,125	0,252	0,304	0,368
2,0	0,050	0,038	0,197	0,166	0,127	0,251	0,296	0,337
1,9	0,055	0,041	0,205	0,172	0,127	0,251	0,294	0,331
1,8	0,060	0,045	0,213	0,179	0,128	0,249	0,291	0,325
1,7	0,066	0,050	0,221	0,187	0,127	0,248	0,288	0,318
1,6	0,073	0,055	0,230	0,195	0,127	0,245	0,284	0,311
1,5	0,080	0,060	0,240	0,204	0,127	0,243	0,279	0,302
1,4	0,088	0,067	0,250	0,213	0,126	0,239	0,273	0,292
1,3	0,097	0,074	0,260	0,223	0,124	0,234	0,266	0,281
1,2	0,106	0,081	0,271	0,233	0,122	0,227	0,257	0,269
1,1	0,116	0,090	0,282	0,244	0,120	0,220	0,247	0,255
1,0	0,126	0,098	0,294	0,256	0,115	0,210	0,234	0,239

Tableau 6.7 Réactions pour $b > a$

$$R_x = \delta p_0 a \quad R_y = \delta_1 p_0 b$$

b/a	Valeurs de δ pour $x = 0$		Valeurs de δ pour $x = a$		Valeurs de δ_1 pour $y = \pm b/2$			
	$y = 0$	$y = 0,25b$	$y = 0$	$y = 0,25b$	$x = 0,25a$	$x = 0,50a$	$x = 0,60a$	$x = 0,75a$
1,0	0,126	0,098	0,294	0,256	0,115	0,210	0,234	0,239
1,1	0,136	0,107	0,304	0,267	0,110	0,199	0,221	0,224
1,2	0,144	0,114	0,312	0,276	0,105	0,189	0,208	0,209
1,3	0,150	0,121	0,318	0,284	0,100	0,178	0,196	0,196
1,4	0,155	0,126	0,323	0,292	0,095	0,169	0,185	0,184
1,5	0,159	0,132	0,327	0,297	0,090	0,160	0,175	0,174
1,6	0,162	0,136	0,330	0,302	0,086	0,151	0,166	0,164
1,7	0,164	0,140	0,332	0,306	0,082	0,144	0,157	0,155
1,8	0,166	0,143	0,333	0,310	0,078	0,136	0,149	0,147
1,9	0,167	0,146	0,334	0,313	0,074	0,130	0,142	0,140
2,0	0,168	0,149	0,335	0,316	0,071	0,124	0,135	0,134
3,0	0,169	0,163	0,336	0,331	0,048	0,083	0,091	0,089
4,0	0,168	0,167	0,334	0,334	0,036	0,063	0,068	0,067
5,0	0,167	0,167	0,334	0,335	0,029	0,050	0,055	0,054
∞	0,167	0,167	0,333	0,333				

Réactions aux angles

pour $b < a$

$$S_1 = -n_1 p_0 ab \quad S_2 = -n_2 p_0 ab$$

pour $b > a$

$$S_1 = -n_1 p_0 ab \quad S_2 = -n_2 p_0 ab$$

Tableau 6.8 Valeurs de n_1 et n_2

a/b	n_1	n_2
5,0	0,002	0,017
4,0	0,004	0,020
3,0	0,006	0,025
2,0	0,013	0,033
1,9	0,014	0,034
1,8	0,016	0,035
1,7	0,017	0,036
1,6	0,018	0,037
1,5	0,020	0,037
1,4	0,021	0,038
1,3	0,023	0,039
1,2	0,024	0,039
1,1	0,025	0,039
1,0	0,026	0,039

Tableau 6.9 Valeurs de n_1 et n_2

a/b	n_1	n_2
1,0	0,026	0,039
1,1	0,026	0,038
1,2	0,026	0,037
1,3	0,026	0,036
1,4	0,025	0,035
1,5	0,024	0,033
1,6	0,023	0,032
1,7	0,022	0,030
1,8	0,021	0,029
1,9	0,021	0,028
2,0	0,020	0,026
3,0	0,014	0,018
4,0	0,010	0,014
5,0	0,008	0,011

■ **Cas 3 : plaque rectangulaire soumise à une charge triangulaire, les quatre côtés en appuis simples**

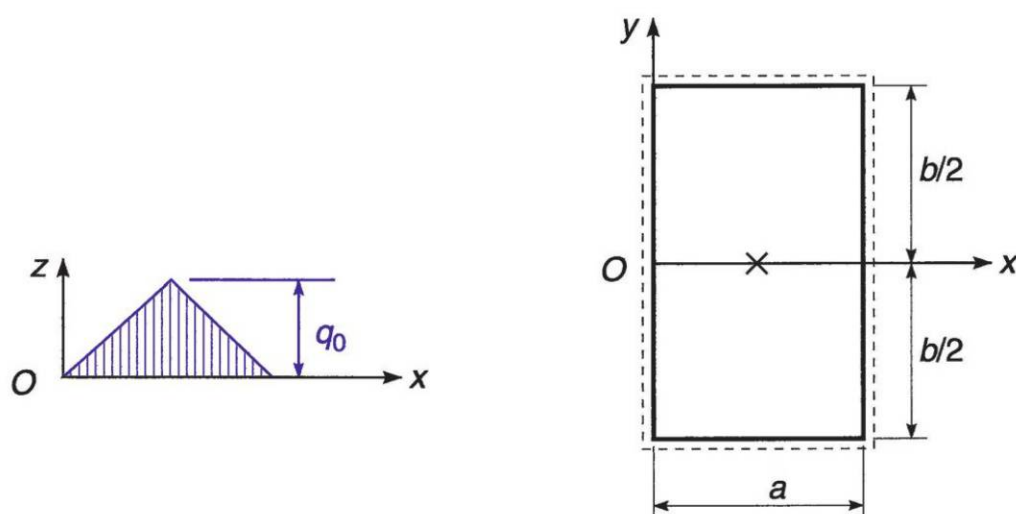


Figure 6.4

Tableau 6.10 Valeurs établies par Galerkin

b/a	$z = -\alpha \frac{q_0 a^4}{Eh^3}$	$M_x = \beta q_0 a^2$	$M_y = \beta_1 q_0 a^2$	$V_x = \gamma q_0 a$	$V_y = \gamma_1 q_0 b$	$R_x = \delta q_0 a$	$R_y = \delta_1 q_0 b$	$S = \eta q_0 ab$
	α	β	β_1	γ	γ_1	δ	δ_1	η
1,0	0,0287	0,0340	0,0317	0,199	0,315	0,147	0,250	0,038
1,1	0,0343	0,0390	0,0326	0,212	0,297	0,161	0,232	0,038
1,2	0,0398	0,0436	0,0330	0,222	0,280	0,173	0,216	0,037
1,3	0,0449	0,0479	0,0332	0,230	0,265	0,184	0,202	0,036
1,4	0,0497	0,0518	0,0331	0,236	0,250	0,193	0,189	0,035
1,5	0,0542	0,0554	0,0329	0,241	0,236	0,202	0,178	0,034
1,6	0,0582	0,0586	0,0325	0,246	0,224	0,208	0,168	0,033
1,7	0,0619	0,0615	0,0321	0,247	0,212	0,214	0,158	0,031
1,8	0,0652	0,0641	0,0316	0,249	0,201	0,220	0,150	0,030
1,9	0,0682	0,0664	0,0311	0,251	0,191	0,224	0,142	0,029
2,0	0,0709	0,0685	0,0306	0,252	0,183	0,228	0,135	0,028
3,0	0,0855	0,0794	0,0270	0,253	0,122	0,245	0,090	0,019
∞	0,0910	0,0833	0,0250	0,250	–	0,250	–	–

a/b	$z = -\alpha \frac{q_0 b^4}{Eh^3}$	$M_x = \beta q_0 b^2$	$M_y = \beta_1 q_0 b^2$	$V_x = \gamma q_0 a$	$V_y = \gamma_1 q_0 b$	$R_x = \delta q_0 a$	$R_y = \delta_1 q_0 b$	$S = \eta q_0 ab$
	α	β	β_1	γ	γ_1	δ	δ_1	η
∞	0,1422	0,0375	0,1250	–	0,500	–	0,500	–
3,0	0,0968	0,0387	0,0922	0,045	0,442	0,027	0,410	0,010
2,0	0,0749	0,0392	0,0707	0,091	0,412	0,057	0,365	0,023
1,9	0,0716	0,0392	0,0681	0,098	0,407	0,062	0,358	0,024
0,8	0,0681	0,0391	0,0651	0,106	0,402	0,098	0,350	0,026
1,7	0,0642	0,0390	0,0609	0,115	0,396	0,074	0,342	0,028
1,6	0,0600	0,0388	0,0585	0,124	0,389	0,081	0,332	0,029
1,5	0,0555	0,0386	0,0548	0,135	0,381	0,090	0,322	0,031
1,4	0,0507	0,0382	0,0508	0,146	0,371	0,099	0,311	0,033
1,3	0,0456	0,0376	0,0464	0,158	0,360	0,109	0,298	0,035
1,2	0,0401	0,0368	0,0418	0,171	0,347	0,120	0,284	0,036
1,1	0,0345	0,0356	0,0369	0,185	0,332	0,133	0,268	0,037
1,0	0,0287	0,0340	0,0317	0,199	0,315	0,147	0,250	0,038

■ **Cas 4 : plaque sur quatre côtés en appuis simples chargée partiellement sur un rectangle, ayant même centre que la plaque**

Moments de flexion

$$M_x = \beta P$$

$$M_y = \beta_1 P$$

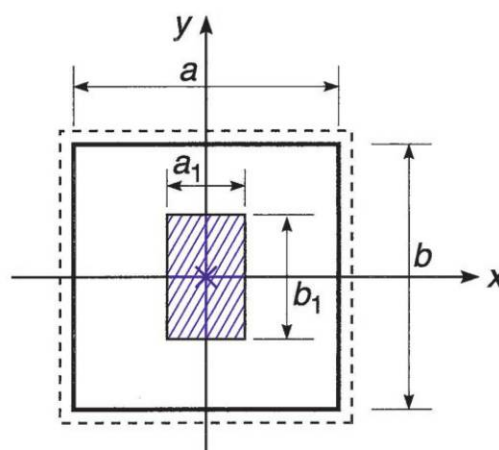


Figure 6.5

Tableau 6.11 Valeurs du coefficient β pour $b = a$
(valeurs établies par Galerkin) (on obtient β_1 en permutant a_1 et b_1)

a_1/a b_1/a	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	∞	0,321	0,251	0,209	0,180	0,158	0,141	0,125	0,112	0,102	0,092
0,1	0,378	0,284	0,232	0,197	0,170	0,150	0,134	0,120	0,108	0,098	0,088
0,2	0,308	0,254	0,214	0,184	0,161	0,142	0,127	0,114	0,103	0,093	0,084
0,3	0,262	0,225	0,195	0,168	0,151	0,134	0,120	0,108	0,098	0,088	0,080
0,4	0,232	0,203	0,179	0,158	0,141	0,126	0,113	0,102	0,092	0,084	0,076
0,5	0,208	0,185	0,164	0,146	0,131	0,116	0,106	0,096	0,087	0,079	0,071
0,6	0,188	0,168	0,150	0,135	0,121	0,109	0,099	0,090	0,081	0,074	0,067
0,7	0,170	0,153	0,137	0,124	0,112	0,101	0,091	0,083	0,076	0,069	0,062
0,8	0,155	0,140	0,126	0,114	0,103	0,094	0,085	0,077	0,070	0,063	0,057
0,9	0,141	0,127	0,115	0,104	0,094	0,086	0,078	0,070	0,064	0,058	0,053
1,0	0,127	0,115	0,105	0,095	0,086	0,078	0,071	0,064	0,058	0,053	0,048

Tableau 6.12 Valeurs des coefficients β et β_1 pour $b = 2a$

a_1/a	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
b_1/a	$\beta = M_x/P$						$\beta_1 = M_y/P$					
0	∞	0,289	0,220	0,175	0,144	0,118	∞	0,294	0,225	0,179	0,148	0,122
0,2	0,347	0,252	0,199	0,163	0,135	0,111	0,242	0,203	0,170	0,143	0,120	0,099
0,4	0,275	0,221	0,181	0,150	0,125	0,103	0,172	0,152	0,133	0,114	0,097	0,081
0,6	0,233	0,195	0,164	0,138	0,115	0,095	0,133	0,120	0,106	0,093	0,079	0,066
0,8	0,203	0,174	0,148	0,126	0,106	0,088	0,107	0,097	0,087	0,076	0,065	0,054
1,0	0,179	0,155	0,134	0,115	0,097	0,080	0,089	0,081	0,073	0,064	0,055	0,046
1,2	0,161	0,141	0,122	0,105	0,089	0,074	0,074	0,068	0,061	0,054	0,046	0,039
1,4	0,144	0,127	0,111	0,096	0,081	0,068	0,064	0,058	0,052	0,046	0,040	0,033
1,6	0,130	0,115	0,101	0,087	0,074	0,062	0,056	0,051	0,046	0,040	0,035	0,029
1,8	0,118	0,104	0,091	0,079	0,067	0,056	0,049	0,045	0,041	0,036	0,031	0,026
2,0	0,107	0,094	0,083	0,072	0,061	0,051	0,044	0,041	0,037	0,032	0,028	0,023

Flèche au centre dans le cas de la charge concentrée ($a_1 = b_1 = 0$)

$$z = -\alpha \frac{Pa^2}{Eh^3}$$

Tableau 6.13

b/a	1,0	1,1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	3,0	∞
α	0,127	0,138	0,148	0,162	0,171	0,177	0,180	0,185	0,185

■ **Cas 5 : plaque rectangulaire uniformément chargée ; un côté encasté, les trois autres simplement appuyés**

Tableau 6.14 $b > a$

Flèches et moments de flexion (valeurs établies par Timoshenko)

$\frac{b}{a}$	$x = \frac{a}{2}, y = 0$ $z = -\alpha \frac{pa^4}{Eh^3}$	$x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}$ $M_y = \beta pa^2$	$x = \frac{a}{2}, y = 0$ $M_x = \beta_1 pa^2$	$x = \frac{a}{2}, y = 0$ $M_y = \beta_2 pa^2$
	α	β	β_1	β_2
1,0	0,030	-0,084	0,034	0,039
1,1	0,038	-0,092	0,041	0,042
1,2	0,047	-0,098	0,049	0,044
1,3	0,055	-0,104	0,056	0,045
1,4	0,063	-0,109	0,063	0,047
1,5	0,070	-0,112	0,069	0,048
2,0	0,101	-0,122	0,094	0,047
∞	0,142	-0,125	0,125	0,037

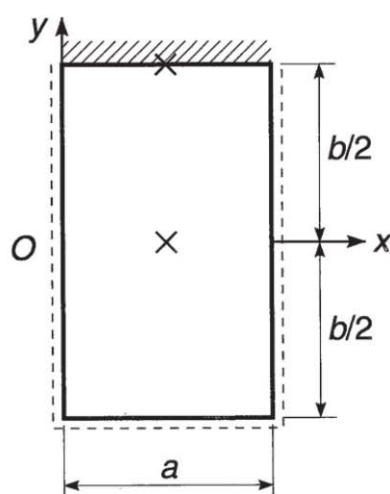


Figure 6.6

Tableau 6.15 $b < a$
Flèches et moments de flexion (valeurs établies par Timoshenko)

$\frac{a}{b}$	$x = \frac{a}{2}, y = 0$ $z = -\alpha \frac{pb^4}{Eb^3}$	$x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}$ $M_y = \beta pb^2$	$x = \frac{a}{2}, y = 0$ $M_x = \beta_1 pb^2$	$x = \frac{a}{2}, y = 0$ $M_y = \beta_2 pb^2$
	α	β	β_1	β_2
∞	0,057	-0,125	0,019	0,062
2,0	0,053	-0,122	0,023	0,060
1,5	0,046	-0,111	0,028	0,054
1,4	0,044	-0,108	0,030	0,052
1,3	0,041	-0,103	0,031	0,050
1,2	0,038	-0,098	0,032	0,047
1,1	0,035	-0,091	0,033	0,043

■ **Cas 6 : plaque rectangulaire uniformément chargée, deux côtés opposés simplement appuyés, les deux autres côtés encastés**

Tableau 6.16 $b > a$

Flèches et moments de flexion (valeurs établies par Timoshenko)

$\frac{b}{a}$	$x = \frac{a}{2}, y = 0$ $z = -\alpha \frac{pa^4}{Eb^3}$	$x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}$ $M_y = \beta pa^2$	$x = \frac{a}{2}, y = 0$ $M_x = \beta_1 pa^2$	$x = \frac{a}{2}, y = 0$ $M_y = \beta_2 pa^2$
	α	β	β_1	β_2
1,0	0,0209	-0,070	0,024	0,033
1,1	0,0274	-0,079	0,031	0,037
1,2	0,0340	-0,087	0,038	0,040
1,3	0,0424	-0,094	0,045	0,043
1,4	0,0502	-0,100	0,052	0,045
1,5	0,0582	-0,105	0,059	0,046
1,6	0,0658	-0,109	0,065	0,047
1,7	0,0730	-0,112	0,071	0,047
1,8	0,0799	-0,115	0,077	0,048
1,9	0,0863	-0,117	0,082	0,048
2,0	0,0987	-0,119	0,087	0,047
3,0	0,1276	-0,125	0,114	0,042
∞	0,1422	-0,125	0,125	0,038

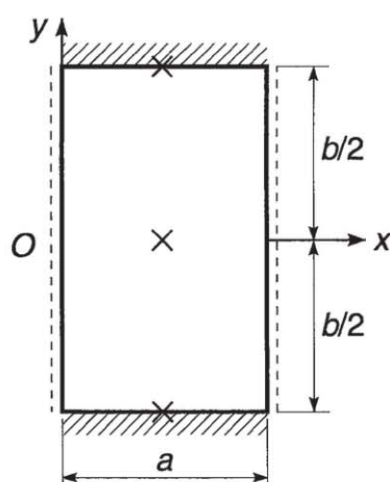


Figure 6.7

Tableau 6.17 $b < a$

Flèches et moments de flexion (valeurs établies par Timoshenko)

$\frac{a}{b}$	$x = \frac{a}{2}, y = 0$ $z = -\alpha \frac{pb^4}{Eb^3}$	$x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}$ $M_y = \beta pb^2$	$x = \frac{a}{2}, y = 0$ $M_x = \beta_1 pb^2$	$x = \frac{a}{2}, y = 0$ $M_y = \beta_2 pb^2$
	α	β	β_1	β_2
∞	0,0284	-0,083	0,013	0,042
2,0	0,0284	-0,084	0,014	0,042
1,5	0,0270	-0,083	0,017	0,041
1,4	0,0262	-0,081	0,019	0,040
1,3	0,0255	-0,079	0,020	0,039
1,2	0,0243	-0,077	0,022	0,037
1,1	0,0228	-0,074	0,023	0,036

■ **Cas 7 : plaque rectangulaire uniformément chargée, encastrée sur quatre côtés**

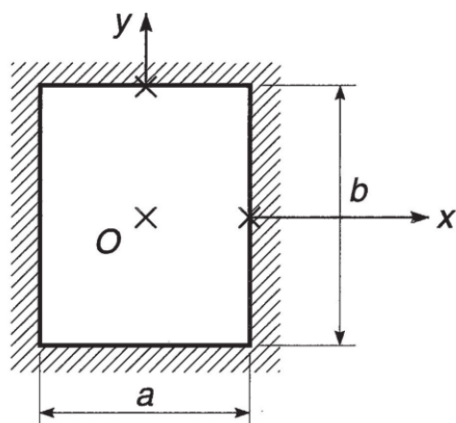


Figure 6.8

Tableau 6.18 Flèches et moments de flexion (valeurs établies par Evans)

$\frac{b}{a}$	z pour $x = 0, y = 0$	M_x pour $x = \frac{a}{2}$	M_y pour $y = \frac{b}{2}$	M_x pour $x = 0, y = 0$	M_y pour $x = 0, y = 0$
1,0	$-0,0138 \frac{pa^4}{Eh^3}$	$-0,0513 \frac{pa^2}{Eh}$	$-0,0513 \frac{pb^2}{Eh}$		
1,1	$-0,0164$ —	$-0,0581$ —	$-0,0538$ —	$0,0264 \frac{pa^2}{Eh}$	$0,0231 \frac{pb^2}{Eh}$
1,2	$-0,0188$ —	$-0,0639$ —	$-0,0554$ —	$0,0299$ —	$0,0228$ —
1,3	$-0,0209$ —	$-0,0687$ —	$-0,0536$ —	$0,0327$ —	$0,0222$ —
1,4	$-0,0226$ —	$-0,0726$ —	$-0,0568$ —	$0,0349$ —	$0,0212$ —
1,5	$-0,0240$ —	$-0,0757$ —			
1,6	$-0,0251$ —	$-0,0780$ —	$-0,0571$ —	$0,0381$ —	$0,0193$ —
1,7	$-0,0260$ —	$-0,0799$ —	$-0,0571$ —	$0,0392$ —	$0,0182$ —
1,8	$-0,0267$ —	$-0,0812$ —	$-0,0571$ —	$0,0401$ —	$0,0174$ —
1,9	$-0,0272$ —	$-0,0822$ —	$-0,0571$ —	$0,0407$ —	$0,0165$ —
2,0	$-0,0277$ —	$-0,0829$ —	$-0,0571$ —		

■ Cas 8 : plaque rectangulaire chargée en son centre, encastrée sur quatre côtés

Tableau 6.19 Flèches au centre. Moments au milieu des grands côtés (valeurs établies par Dana Young)

$\frac{b}{a}$	z	M
1,0	$-0,0611 \frac{Pa^2}{Eh^3}$	$-0,1257 P$
1,2	$-0,0706 —$	$-0,1490 P$
1,4	$-0,0755 —$	$-0,1604 P$
1,6	$-0,0777 —$	$-0,1651 P$
1,8	$-0,0786 —$	$-0,1667 P$
2,0	$-0,0788 —$	$-0,1674 P$

■ Cas 9 : plaque rectangulaire simplement appuyée sur trois côtés, le quatrième étant libre, uniformément chargée

Point 1 $x = 0 \quad y = b$

Point 2 $x = 0 \quad y = \frac{b}{2}$

Flèche au point 1

$$z = -\alpha \frac{pb^4}{Eh^3}$$

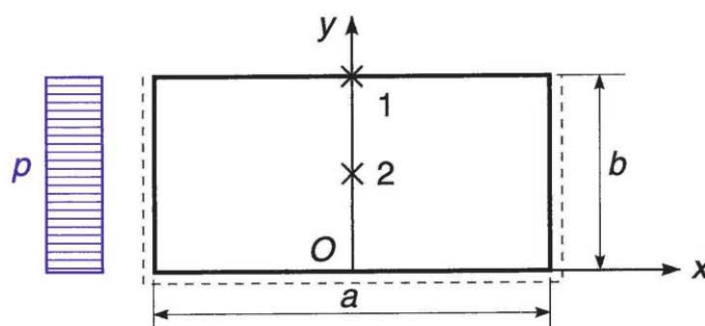


Figure 6.9

Moments de flexion

au point 1 $M_x = \beta_1 pa^2 \quad M_y = 0$

au point 2 $M_x = \beta_2 pa^2 \quad M_y = \beta_3 pa^2$

Réactions totales

sur côtés $x = \pm \frac{a}{2} \quad R_x = \delta_1 pab$

sur côtés $y = 0 \quad R_y = \delta_2 pab$

Tableau 6.20 Valeurs établies par Galerkin et Hahn

b/a	α	β_1	β_2	β_3	δ_1	δ_2
0,1	0,0048	0,003	0,004	0,004	0,09	0,82
0,2	0,0180	0,013	0,008	0,008	0,15	0,70
0,3	0,0367	0,027	0,014	0,013	0,21	0,58
0,4	0,0574	0,044	0,024	0,018	0,25	0,51
0,5	0,0775	0,060	0,039	0,022	0,28	0,44
0,6	0,0953	0,075	0,046	0,028	0,30	0,41
0,7	0,1104	0,087	0,056	0,032	0,32	0,37
0,8	0,1227	0,097	0,065	0,035	0,33	0,34
0,9	0,1326	0,105	0,073	0,037	0,35	0,30
1,0	0,1403	0,112	0,080	0,039	0,37	0,27
1,1	0,1464	0,117	0,085	0,040	0,38	0,24
1,2	0,1511	0,121	0,090	0,041	0,39	0,23
1,3	0,1547	0,124	0,094	0,042	0,39	0,21
1,4	0,1575	0,126	0,098	0,042	0,40	0,20
1,5	0,1596	0,128	0,101	0,042	0,41	0,19
2,0	0,1646	0,132	0,113	0,041	0,43	0,14
3,0	0,1660	0,133	0,122	0,039	0,46	0,08
∞	0,1662	0,133	0,125	0,037	0,50	0,00

■ **Cas 10 : plaque rectangulaire simplement appuyée sur trois côtés, le quatrième étant libre, soumise à une pression hydrostatique**

Point 1 $x = 0$ $y = b$

Point 2 $x = 0$ $y = \frac{b}{2}$

Flèche au point 1

$$z = -\alpha \frac{p_0 b^4}{Eh^3}$$

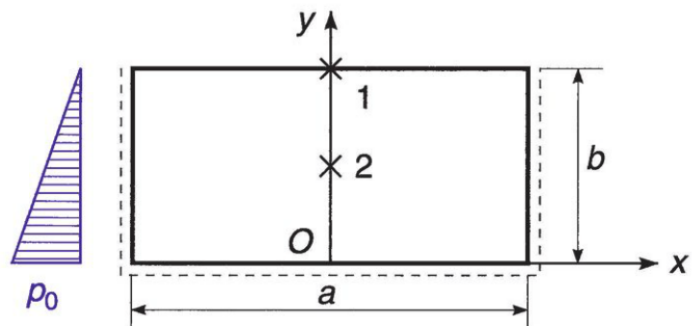


Figure 6.10

Moments de flexion

au point 1 $M_x = \beta_1 p_0 a^2$
 $M_y = 0$

$M_x = \beta_2 p_0 a^2$
 au point 2 $M_y = \beta_3 p_0 a^2$

Tableau 6.21

b/a	α	β_1	β_2	β_3
0,1	0,002	0,001	0,002	0,002
0,2	0,006	0,005	0,003	0,003
0,3	0,012	0,009	0,005	0,005
0,4	0,019	0,015	0,009	0,009
0,5	0,025	0,020	0,013	0,013
0,6	0,030	0,025	0,017	0,017
0,7	0,034	0,028	0,021	0,021
0,8	0,037	0,031	0,025	0,024
0,9	0,039	0,033	0,028	0,027
1,0	0,040	0,034	0,031	0,030
1,1	0,041	0,034	0,034	0,033
1,2	0,041	0,034	0,037	0,035
1,3	0,041	0,034	0,039	0,037
1,4	0,040	0,033	0,042	0,039
1,5	0,039	0,032	0,044	0,040
2,0	0,032	0,026	0,052	0,040
3,0	0,023	0,019	0,060	0,037
∞			0,063	0,035

■ **Cas 11 : plaque rectangulaire simplement appuyée sur deux côtés opposés, un autre côté étant libre et le dernier encastré**

Flèche au point 1

$$z = -\alpha \frac{pa^4}{Eb^3}$$

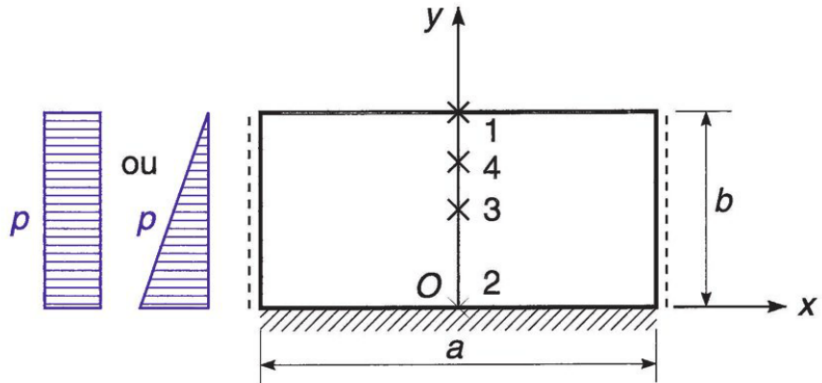


Figure 6.11

Moments de flexion

au point 1 $(x = 0 \quad y = b)$ $M_x = \beta_1 pa^2$ $M_y = 0$

au point 2 $(x = 0 \quad y = 0)$ $M_y = \beta_2 pa^2$ $M_x = 0$

au point 3 $(x = 0 \quad y = \frac{b}{2})$ $M_x = \beta_3 pa^2$

au point 4 $(x = 0 \quad y = \gamma b)$ $M_y = \beta_4 pa^2$ (maximum)

Tableau 6.22 Charge uniformément répartie
(valeurs établies par Boobnov et Hahn)

b/a	α	β_1	β_2	β_3	γ	β_4
0,1	0,0001	0,0000	0,005	0,0000	1,00	0,0000
0,2	0,0021	0,0006	0,020	0,0002	0,81	0,0010
0,3	0,0090	0,0061	0,037	0,0022	0,79	0,0028
0,4	0,0220	0,0170	0,056	0,0066	0,77	0,0052
0,5	0,0397	0,0300	0,074	0,0130	0,75	0,0080
0,6	0,0594	0,0450	0,088	0,0210	0,73	0,0120
0,7	0,0786	0,0610	0,099	0,0300	0,72	0,0160
0,8	0,0959	0,0750	0,108	0,0380	0,70	0,0210
0,9	0,1106	0,0860	0,114	0,0470	0,69	0,0260
1,0	0,1226	0,0960	0,118	0,0540	0,67	0,0280
1,1	0,1334	0,1040	0,121	0,0620	0,66	0,0310
1,2	0,1415	0,1120	0,122	0,0700	0,64	0,0320
1,3	0,1477	0,1170	0,124	0,0740	0,63	0,0320
1,4	0,1520	0,1210	0,124	0,0800	0,61	0,0330
1,5	0,1554	0,1230	0,124	0,0850	0,60	0,0330
2,0	0,1632	0,1310	0,125	0,1030	0,56	0,0340
3,0	0,1660	0,1330	0,125	0,1220	0,53	0,0370
∞	0,1662	0,1330	0,125	0,1250	0,50	0,0370

Tableau 6.23 Pression hydrostatique

b/a	β_1	β_2	β_3	γ	β_4
0,1	0,0000	0,00167	0,0000	1,00	0,0000
0,2	0,0001	0,00660	0,0000	0,76	0,0008
0,3	0,0017	0,01300	0,0006	0,74	0,0013
0,4	0,0046	0,02000	0,0019	0,71	0,0026
0,5	0,0082	0,02800	0,0039	0,69	0,0042
0,6	0,0130	0,03500	0,0065	0,67	0,0065
0,7	0,0170	0,04200	0,0094	0,65	0,0093
0,8	0,0210	0,04800	0,0130	0,64	0,0120
0,9	0,0240	0,05300	0,0160	0,63	0,0150
1,0	0,0260	0,05700	0,0190	0,62	0,0180
1,1	0,0280	0,06200	0,0230	0,61	0,0210
1,2	0,0290	0,06500	0,0260	0,61	0,0230
1,3	0,0300	0,06800	0,0290	0,61	0,0250
1,4	0,0300	0,07100	0,0320	0,60	0,0270
1,5	0,0290	0,07400	0,0350	0,60	0,0280
2,0	0,0260	0,08500	0,0470	0,56	0,0320
3,0	0,0190	0,09600	0,0600	0,53	0,0350
∞	0,0000	0,11700	0,0630	0,50	0,0350

■ **Cas 12 : plaque rectangulaire encastree sur trois cotes, le quatrieme etant libre**

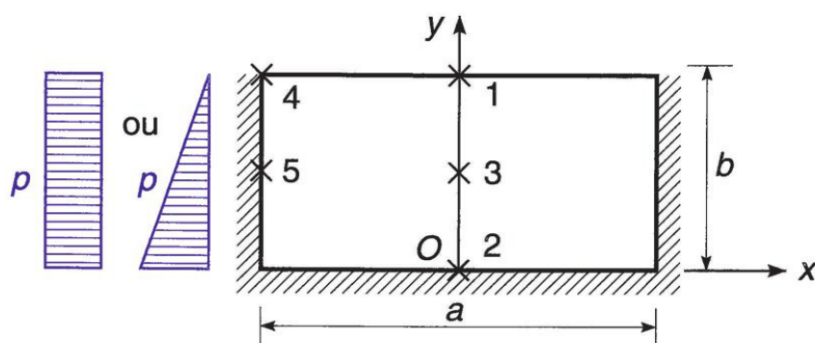


Figure 6.12

Moments de flexion

au point 1	$(x = 0 \quad y = b)$	$M_x = \beta_1 pa^2$	$M_y = 0$
au point 2	$(x = 0 \quad y = 0)$	$M_y = \beta_2 pa^2$	$M_x = 0$
au point 3	$(x = 0 \quad y = \frac{b}{2})$	$M_x = \beta_3 pa^2$	$M_y = \gamma_3 pa^2$
au point 4	$(x = \pm \frac{a}{2} \quad y = b)$	$M_x = -\beta_4 pa^2$	$M_y = 0$
au point 5	$(x = \pm \frac{a}{2} \quad y = \frac{b}{2})$	$M_x = -\beta_5 pa^2$	$M_y = 0$

Tableau 6.24 Charge uniformément répartie
(Valeurs établies par Czerny)

b/a	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	γ_3
0,1	0,000	0,005	0,0000	0,005	0,003	0,000
0,2	0,001	0,020	0,0002	0,022	0,008	0,000
0,3	0,006	0,033	0,0022	0,039	0,013	0,001
0,4	0,017	0,044	0,0066	0,059	0,022	0,004
0,5	0,027	0,051	0,0130	0,074	0,032	0,007
0,6	0,035	0,054	0,0190	0,081	0,041	0,009
0,7	0,040	0,056	0,0220	0,085	0,049	0,011
0,8	0,043	0,056	0,0260	0,086	0,056	0,012
0,9	0,044	0,057	0,0290	0,087	0,062	0,013
1,0	0,045	0,057	0,0310	0,086	0,067	0,014
1,1	0,045	0,057	0,0330	0,086	0,071	0,015
1,2	0,046	0,057	0,0360	0,085	0,074	0,016
1,3	0,046	0,057	0,0360	0,085	0,076	0,016
1,4	0,045	0,057	0,0380	0,084	0,079	0,016
1,5	0,045	0,057	0,0390	0,084	0,080	0,016
2,0	0,045	0,057	0,0410	0,084	0,082	0,017
3,0	0,044	0,057	0,0430	0,083	0,083	0,018
∞	0,044	0,057	0,0440	0,083	0,083	0,018

Tableau 6.25 Pression hydrostatique

b/a	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	γ_3
0,1	0,0000	0,00167	0,0000	0,00167	0,0009	0,0000
0,2	0,0001	0,00400	0,0000	0,00650	0,0033	0,0000
0,3	0,0022	0,01200	0,0006	0,00960	0,0049	0,0009
0,4	0,0050	0,01700	0,0019	0,01400	0,0084	0,0024
0,5	0,0074	0,02100	0,0039	0,01700	0,0120	0,0042
0,6	0,0094	0,02500	0,0061	0,01800	0,0160	0,0062
0,7	0,0110	0,02800	0,0078	0,01700	0,0200	0,0082
0,8	0,0110	0,03100	0,0096	0,01600	0,0240	0,0100
0,9	0,0110	0,03300	0,0110	0,01500	0,0270	0,0120
1,0	0,0100	0,03500	0,0130	0,01300	0,0300	0,0130
1,1	0,0095	0,03700	0,0140	0,01200	0,0330	0,0140
1,2	0,0089	0,03800	0,0160	0,01100	0,0350	0,0150
1,3	0,0088	0,04000	0,0160	0,01000	0,0370	0,0160
1,4	0,0076	0,04100	0,0170	0,00940	0,0380	0,0160
1,5	0,0070	0,04200	0,0180	0,00870	0,0390	0,0170
2,0	0,0050	0,04400	0,0200	0,00650	0,0410	0,0170
3,0	0,0020	0,04800	0,0210	0,00320	0,0420	0,0180
∞	0,0000	0,05000	0,0210	0,00000	0,0420	0,0180

6.3 Plaques circulaires

Notations particulières

M_r : moment de flexion radial
 M_t : moment de flexion tangentiel
 r : rayon polaire
 $\ln$: logarithme népérien

■ **Cas 1 : plaque uniformément chargée, à bord simplement appuyé**

$$z = -\frac{p(a^2 - r^2)}{64D} \left[\frac{5 + \nu}{1 + \nu} a^2 - r^2 \right]$$

$$M_t = \frac{p}{16} (3 + \nu) (a^2 - r^2)$$

$$M_t = \frac{p}{16} [a^2 (3 + \nu) - r^2 (1 + 3\nu)]$$

Au centre : $M_r = M_t = \frac{pa^2}{16} (3 + \nu)$

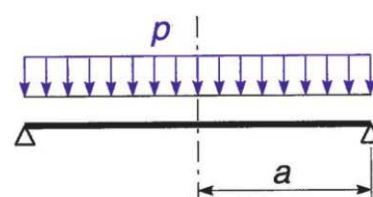


Figure 6.13

■ **Cas 2 : plaque uniformément chargée, à bord encasturé**

$$z = -\frac{p}{64D} (a^2 - r^2)$$

$$M_r = \frac{p}{16} [a^2 (1 + \nu) - r^2 (3 + \nu)]$$

$$M_t = \frac{p}{16} [a^2 (1 + \nu) - r^2 (1 + 3\nu)]$$

Au centre : $M_r = M_t = \frac{pa^2}{16} (1 + \nu)$

Au bord : $M_r = \frac{pa^2}{8} \quad M_t = -\nu \frac{pa^2}{8}$

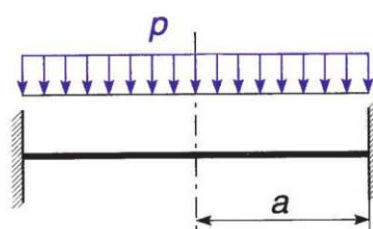


Figure 6.14

■ **Cas 3 : plaque chargée suivant une circonférence concentrique, à bord simplement appuyé**

P = charge totale

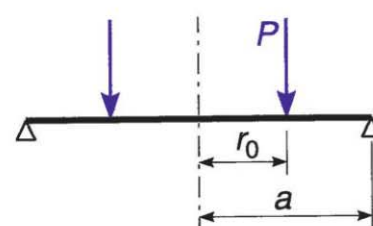


Figure 6.15

$$r > r_0 \quad z = -\frac{P}{8\pi D} \left[(a^2 - r^2) \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\nu}{1+\nu} \cdot \frac{a^2 - r_0^2}{a^2} \right) + (r_0^2 + r^2) \ln \frac{r}{a} \right]$$

$$r < r_0 \quad z = -\frac{P}{8\pi D} \left[(r_0^2 + r^2) \ln \frac{r_0}{a} + (a^2 - r_0^2) \frac{(3+\nu)a^2 - (1-\nu)r^2}{2(1+\nu)a^2} \right]$$

Dans la partie centrale, pour $r < r_0$:

$$M_r = M_t = \frac{(1-\nu)(a^2 - r_0^2)}{8\pi a^2} P - \frac{(1+\nu)P}{4\pi} \ln \frac{r_0}{a}$$

■ **Cas 4 : plaque chargée suivant une circonférence concentrique, à bord encasté**

P = charge totale

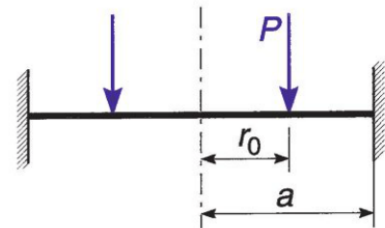


Figure 6.16

Flèche au centre :

$$z = -\frac{P}{8\pi D} \left[\frac{1}{2}(a^2 - r_0^2) + r_0^2 \ln \frac{r_0}{a} \right]$$

Au bord encasté :

$$M_r = -\frac{P}{4\pi} \cdot \frac{a^2 - r_0^2}{a^2} \quad M_t = -\nu \frac{P}{4\pi} \cdot \frac{a^2 - r_0^2}{a^2}$$

■ **Cas 5 : plaque à bord simplement appuyé, supportant une charge totale P uniformément répartie à l'intérieur du cercle de rayon c**

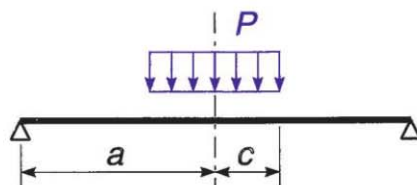


Figure 6.17

Pour $r > c$:

$$z = -\frac{P}{16\pi D} \left[\frac{3+\nu}{1+\nu} (a^2 - r^2) + 2r^2 \ln \frac{r}{a} + c^2 \left(\ln \frac{r}{a} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\nu}{1+\nu} \cdot \frac{a^2 - r^2}{a^2} \right) \right]$$

$$M_r = \frac{(1+\nu)P}{4\pi} \ln \frac{a}{r} + \frac{(1-\nu)Pc^2}{16\pi} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2} \right)$$

$$M_t = \frac{P}{4\pi} \left[(1+\nu) \ln \frac{a}{r} + (1-\nu) \right] - \frac{(1-\nu)Pc^2}{16\pi} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{a^2} \right)$$

Pour $r = c$:

$$z = -\frac{P}{16\pi D} \left[\frac{3+\nu}{1+\nu} (a^2 - c^2) + c^2 \left(3 \ln \frac{c}{a} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\nu}{1+\nu} \cdot \frac{a^2 - c^2}{a^2} \right) \right]$$

$$M_r = \frac{(1+\nu)P}{4\pi} \ln \frac{a}{c} + \frac{(1-\nu)P(a^2 - c^2)}{16\pi a^2}$$

$$M_t = \frac{P}{4\pi} \left[(1+\nu) \ln \frac{a}{c} + (1-\nu) \right] - \frac{(1-\nu)P(a^2 - c^2)}{16\pi a^2}$$

Au centre :

$$z = -\frac{P}{16\pi D} \left[\frac{3+\nu}{1+\nu} a^2 + c^2 \ln \frac{c}{a} + \frac{7+3\nu}{4(1+\nu)} c^2 \right]$$

$$M_r = M_t = \frac{P}{4\pi} \left[(1+\nu) \ln \frac{a}{c} + 1 - \frac{(1-\nu)c^2}{4a^2} \right]$$

■ **Cas 6 : plaque soumise à une charge antisymétrique variant linéairement**

$$z = -\frac{p}{192(3 + \nu)Da} r(a^2 - r^2)$$

$$[(7 + \nu)a^2 - (3 + \nu)r^2]\cos\theta$$

$$M_r = \frac{p}{48a}(5 + \nu)r(a^2 - r^2)\cos\theta$$

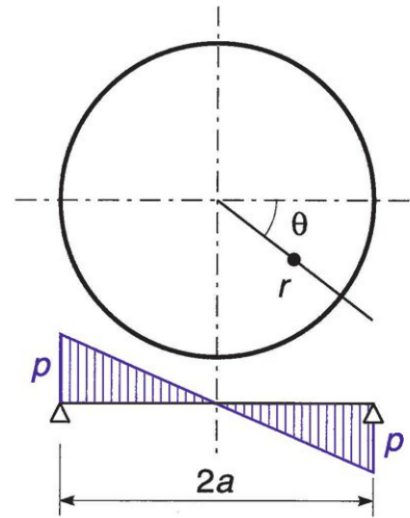


Figure 6.18

$$M_t = \frac{pr}{48(3 + \nu)a} [(5 + \nu)(1 + 3\nu)a^2 - (1 + 5\nu)(3 + \nu)r^2]\cos\theta$$

$$M_r \text{ est maximal pour } r = \pm \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$M_t \text{ est maximal pour } r = \pm a \sqrt{\frac{(5 + \nu)(1 + 3\nu)}{3(1 + 5\nu)(3 + \nu)}}$$

Remarque

Dans l'exemple d'une plaque circulaire comportant un porte-à-faux, chargée et appuyée comme au cas 1, les résultats sont obtenus par application du principe de superposition selon la figure 6.19.

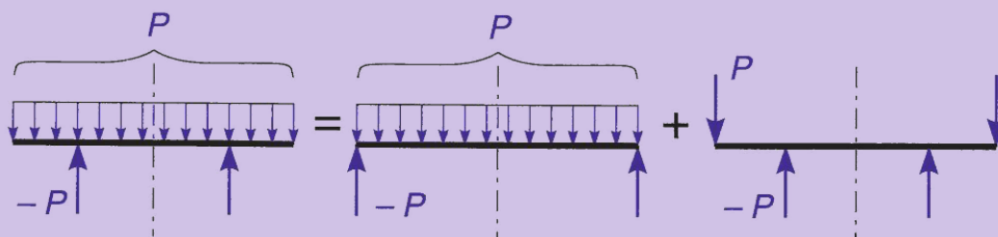


Figure 6.19

6.4 Plaques annulaires

On utilise ici les mêmes notations que pour les plaques circulaires.

■ Cas 1 : plaque simplement appuyée sur son périmètre extérieur avec charge uniformément répartie

Posons $\beta = \frac{b}{a}$ $\rho = \frac{r}{a}$

$$K = \beta^2 \left[3 + \nu + 4(1 + \nu) \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \ln \beta \right]$$

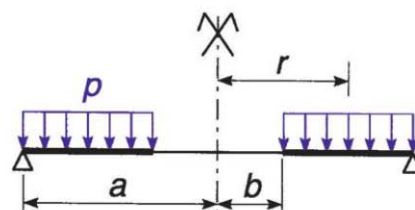


Figure 6.20

L'effort tranchant est maximal pour $r = a$: $V = \frac{pa}{2}(1 - \beta^2)$.

Le moment radial est maximal pour un rayon r satisfaisant l'équation suivante :

$$6,3 \rho^4 - 4,6 \beta^2 \rho^2 - 2K = 0$$

et sa valeur est :

$$M_r = \frac{pa^2}{16} \left[(3 + \nu)(1 - \rho^2) + K \left(1 - \frac{1}{\rho^2} \right) + 4(1 + \nu) \beta^2 \ln \rho \right]$$

Le moment tangential est maximal pour $r = b$:

$$M_t = \frac{pa^2}{16} \left[3 + \nu - \beta^2(5 - \nu) + K \left(1 + \frac{1}{\beta^2} \right) + 4(1 + \nu) \beta^2 \ln \beta \right]$$

il est minimal pour $r = a$:

$$M_t = \frac{pa^2}{16} [2(1 - \nu)(1 - 2\beta^2) + 2K]$$

La flèche est maximale pour $r = b$:

$$z = -\frac{pa^4}{64D} \left[\frac{2(1-\beta^2)}{1+\nu} [(3+\nu)(1-2\beta^2) + K] - (1-\beta^4) - \frac{4K}{1-\nu} \ln \beta - 8\beta^4 \ln \beta \right]$$

■ **Cas 2 : plaque simplement appuyée sur son périmètre extérieur avec une charge répartie le long du bord intérieur**

Posons $\beta = \frac{b}{a}$ $\rho = \frac{r}{a}$

$$K = \frac{(1+\nu)\beta^2}{1-\beta^2} \ln \beta$$

P = charge totale

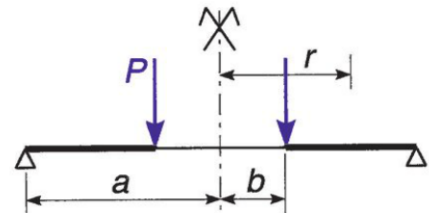


Figure 6.21

L'effort tranchant est maximal pour $r = b$: $V = \frac{P}{2\pi b}$.

Le moment radial est maximale pour un rayon r tel que :

$$\rho^2 = \frac{2K}{1,15}$$

et sa valeur est :

$$M_r = \frac{P}{4\pi} \left[K \left(\frac{1}{\rho^2} - 1 \right) - (1+\nu) \ln \rho \right]$$

Le moment tangentiel est maximal pour $r = b$:

$$M_t = \frac{P}{4\pi} \left[1 - \nu - K \left(\frac{1}{\beta^2} + 1 \right) - (1+\nu) \ln \beta \right]$$

il est minimal pour $r = a$:

$$M_t = \frac{P}{4\pi}(1 - \nu - 2K)$$

La flèche est maximale pour $r = b$:

$$z = -\frac{Pa^2}{16\pi D} \left[\frac{3 + \nu - 2K}{1 + \nu}(1 - \beta^2) + \frac{4K}{1 - \nu} \ln \beta + 2\beta^2 \ln \beta \right]$$

■ **Cas 3 : plaque simplement appuyée sur ses périmètres extérieur et intérieur, avec charge uniformément répartie**

Les résultats sont obtenus par superposition de ceux des deux cas précédents.

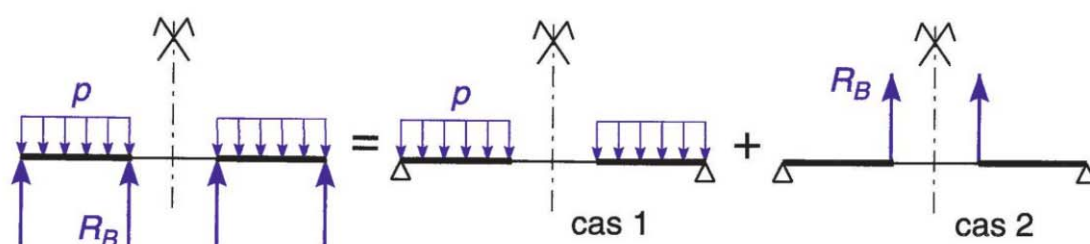


Figure 6.22

La valeur de R_B est déterminée en écrivant que la flèche sur le périmètre intérieur est nulle.

■ **Cas 4 : plaque simplement appuyée sur le périmètre intérieur, avec charge uniformément répartie**

Les résultats sont obtenus par superposition de ceux des deux cas 1 et 2.

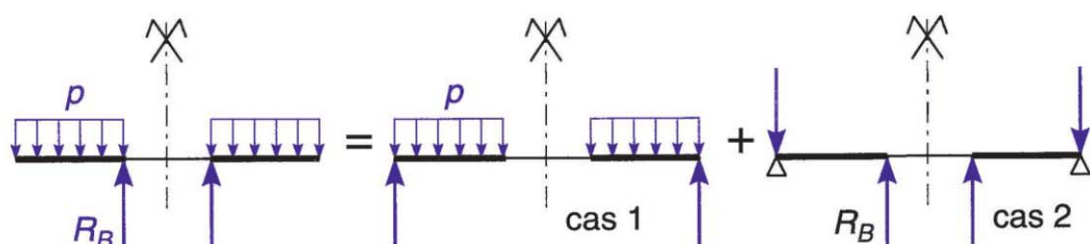


Figure 6.23

6.5 Plaques elliptiques

■ Cas 1 : plaque elliptique simplement appuyée, uniformément chargée (établi par Galerkin)

Au centre de la plaque :

$$z = -\alpha \frac{pb^4}{Eh^3}$$

$$M_x = \beta pb^2$$

$$M_y = \beta_1 pb^2$$

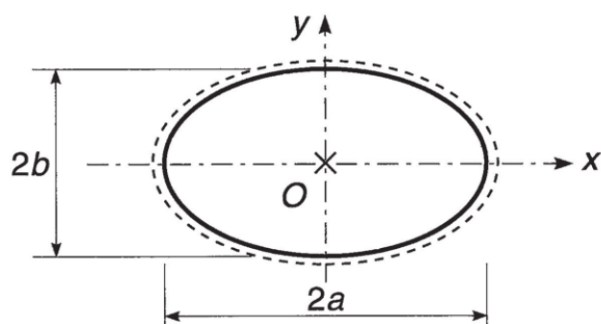


Figure 6.24

Tableau 6.26

b/a	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	2	3	4	5	∞
α	0,700	0,830	0,960	1,070	1,170	1,260	1,580	1,880	2,020	2,100	2,280
β	0,206	0,215	0,219	0,223	0,223	0,222	0,210	0,188	0,184	0,170	0,150
β_1	0,206	0,235	0,261	0,282	0,303	0,321	0,379	0,433	0,465	0,480	0,500

■ Cas 2 : plaque elliptique encastée sur son pourtour, uniformément chargée (établi par Bryan)

$$z_0 = \frac{p}{24 \left[\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{2}{3a^2b^2} \right]}$$

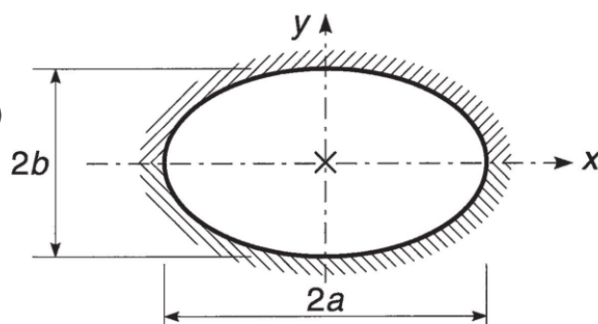


Figure 6.25

Flèche au centre :

$$z = -\frac{z_0}{D}$$

Moments de flexion :

- au centre de la plaque ($x = y = 0$)

$$M_x = 4z_0 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\nu}{b^2} \right) \quad M_y = 4z_0 \left(\frac{1}{b^2} + \frac{\nu}{a^2} \right)$$

- à l'appui ($x = 0 \quad y = \pm b$) ($y = 0 \quad x = \pm a$)

$$M_y = -\frac{8z_0}{b^2} \quad M_x = -\frac{8z_0}{a^2}$$

6.6 Plaques triangulaires

- **Cas 1 : triangle équilatéral simplement appuyé sur les côtés, uniformément chargé (établi par Woinowsky-Krieger)**

Flèche maximale :

$$z = -0,0108 \frac{pa^4}{Eh^3}$$

pour $y = 0$ et $x = 0,27a$

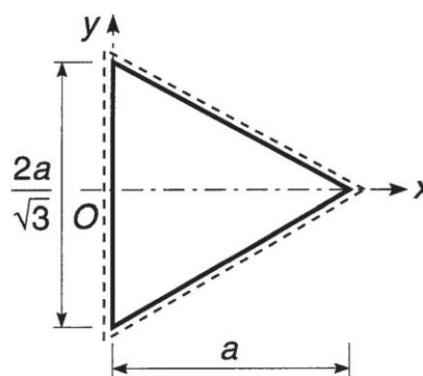


Figure 6.26

Moments de flexion :

au centre de gravité du triangle ($y = 0 \quad x = \frac{a}{3}$)

$$M_x = M_y = 0,0241 pa^2$$

M_x est maximum pour $y = 0$ et $x = 0,27a$

$$M_x = 0,0248 pa^2$$

M_y est maximum pour $y = 0$ et $x = 0,46a$

$$M_y = 0,0259 pa^2$$

■ **Cas 2 : triangle isocèle rectangle, simplement appuyé sur les côtés, uniformément chargé (établi par Nadal)**

Flèche maximale :

$$z = -0,01 \frac{pa^4}{Eb^3} \text{ pour } y = 0 \text{ et } x = 0,35a$$

M_x est maximal pour $y = 0$ et $x = 0,47a$

$$M_x = 0,0215 pa^2$$

M_y est maximal pour $y = 0$ et $x = 0,24a$

$$M_y = 0,0185 pa^2$$

Pour $y = 0$ et $x = 0,34a$

$$M_x = M_y = 0,0181 pa^2$$

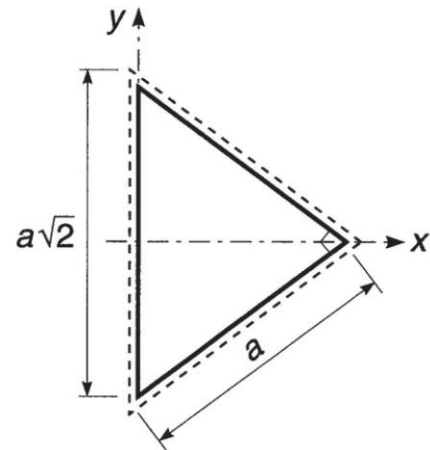


Figure 6.27

■ **Cas 3 : triangle isocèle simplement appuyé sur les côtés uniformément chargé**

L'interpolation des résultats des cas précédents et des cas limites ($\gamma = 0$ et $\gamma = 180^\circ$) conduit à :

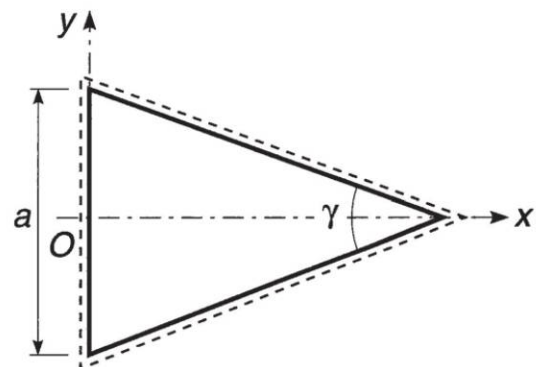


Figure 6.28

Tableau 6.27

γ°	α	β	β_1
10	0,068	0,090	0,006
20	0,045	0,065	0,010
30	0,030	0,048	0,014
40	0,022	0,035	0,017
50	0,016	0,026	0,018
60	0,011	0,020	0,019
70	0,011	0,015	0,017
80	0,010	0,011	0,013
90	0,010	0,009	0,011
100	0,010	0,008	0,010
110	0,010	0,007	0,009
120	0,009	0,006	0,008

Flèche maximale :

$$z = -\alpha \frac{pa^4}{Eh^3}$$

Moments maximaux :

$$M_x = \beta_1 pa^2$$

$$M_y = \beta pa^2$$

6.7 Plaque sur appui élastique continu

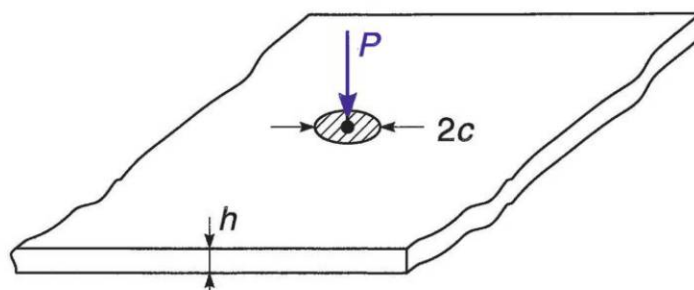


Figure 6.29

Sous l'effet d'une charge P répartie sur un cercle de rayon c , Westergaard a établi :

Flèche sous la charge :
$$z = -\frac{P}{8\sqrt{kD}} \quad (6.7)$$

Moment au droit de la charge :

$$M = 0,0458 (1 + \nu) P \log \left[\frac{Eh^3}{kb^4} \right] \quad (6.8)$$

où k est le module de réaction de l'appui :

$$b = h \left(\sqrt{1 + 1,6\beta^2} - 0,675 \right)$$

borné supérieurement à c avec $\beta = \frac{c}{h}$.

6.8 Effet d'un gradient de température

On suppose que la variation de température dans l'épaisseur de la plaque est linéaire et que la température reste la même dans un plan parallèle au plan moyen.

Si les bords de la plaque sont encastres de manière à rendre impossible toute rotation dans des appuis permettant la libre dilatation longitudinale, le moment par unité de longueur le long du bord, pour une différence de température Δt entre les deux faces de la plaque est :

$$M = \frac{\alpha \Delta t D (1 + \nu)}{h} = \frac{E \alpha \Delta t h^2}{12(1 - \nu)} \quad (6.9)$$

Les contraintes extrêmes sont égales à $\pm \frac{E \alpha \Delta t}{2(1 - \nu)}$.

7

Coques

Définitions

Les **coques** se définissent géométriquement à partir d'une surface moyenne réglée (surface cylindrique, cône, conoïde, parabololoïde hyperbolique, hyperboloïde de révolution) ou non réglée (sphère, ellipsoïde, etc.) de part et d'autre de laquelle on obtient à la distance $\frac{h}{2}$ les faces parallèles, extérieure et intérieure de la coque ; la face supérieure est appelée extrados, la face inférieure intrados.

On suppose que l'épaisseur h est faible par rapport aux autres dimensions et aux rayons de courbure de la surface moyenne.

Une portion élémentaire de coque, limitée par quatre plans normaux à la surface moyenne et orthogonaux à leurs intersections, est soumise aux forces intérieures suivantes :

- 1) des tensions tangentes à la surface moyenne, et agissant normalement aux bords latéraux de l'élément ; des cisaillements tangents à la surface moyenne et agissant le long des bords latéraux ;
- 2) des couples de flexion et des efforts tranchants appliqués aux bords latéraux, des couples de torsion.

Les premières forces sont dites forces de membrane ; les autres, forces de flexion.

7.1 Coques sans flexion

7.1.1 Formules de base

Voiles minces de révolution

Sauf au voisinage des lisières et des appuis, où l'on doit tenir compte des efforts de flexion, les coques en forme de surface de révolution et subissant un système de charges de révolution, se prêtent particulièrement bien au calcul suivant la théorie de membrane, dans lequel on ne considère que les forces du premier type.

Soit P un point quelconque de la surface de révolution d'axe zz' ; la figure 7.1 représente une coupe radiale suivant le méridien passant par P .

On désigne par R_1 le rayon de courbure du méridien au point P , par R_2 le rayon de courbure de la ligne d'intersection de la surface avec le plan normal au méridien au point P , et par r le rayon du petit cercle, ou parallèle, passant par P .

En chaque point d'un parallèle agissent une pression p_n normale à la surface et un effort p_t tangent au méridien. On calcule les tensions normales n_θ et n_φ (efforts normaux par unité de longueur de méridien et de parallèle) ; les cisaillements sont nuls par suite de la symétrie.

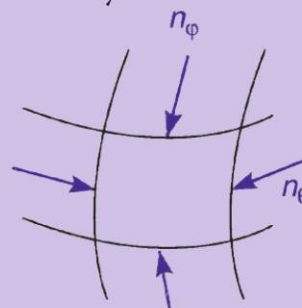
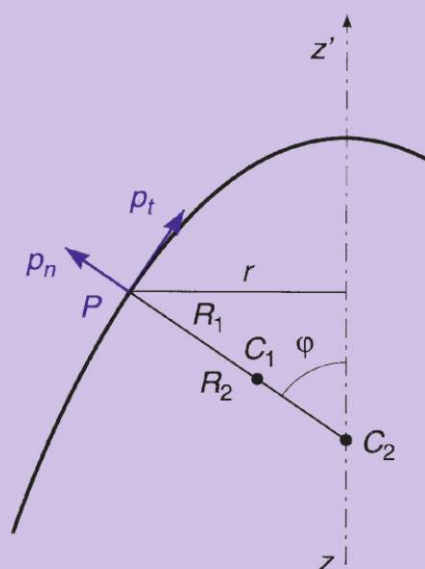


Figure 7.1

Soit Q la résultante totale qui agit sur la partie de coque située au-dessus des parallèles passant par le point P . L'équation d'équilibre de translation donne $2\pi r n_\varphi \sin \varphi + Q = 0$ et conduit à :

$$n_\varphi = -\frac{Q}{2\pi R_2 \sin^2 \varphi} \quad (7.1)$$

L'équation d'équilibre de translation du point P suivant la normale en ce point donne :

$$\frac{n_\varphi}{R_1} + \frac{n_\theta}{R_2} p_n = 0 \quad (7.2)$$

d'où :

$$n_\theta = \frac{Q}{2\pi R_1 \sin^2 \varphi} - p_n R_2 \quad (7.3)$$

Cas particulier de la coupole sphérique

Elle est caractérisée par $R_1 = R_2 = R$. Les formules (7.1) et (7.2) s'écrivent :

$$n_\varphi = -\frac{Q}{2\pi R \sin^2 \varphi} \quad (7.4)$$

et
$$n_\varphi + n_\theta = -p_n R$$

7.1.2 Formulaire de la coupole sphérique

■ Cas 1 : charge p uniforme par unité de surface (poids propre)

$$n_{\varphi} = pR \frac{\cos \varphi_0 - \cos \varphi}{\sin^2 \varphi}$$

$$n_{\theta} = pR \left(\cos \varphi - \frac{\cos \varphi_0 - \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \right)$$

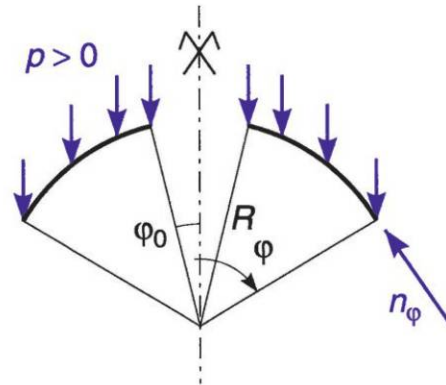


Figure 7.2

Si $\varphi_0 = 0$, les formules précédentes conduisent à :

$$n_{\varphi} = \frac{pR}{1 + \cos \varphi}$$

$$n_{\theta} = pR \left(\cos \varphi - \frac{1}{1 + \cos \varphi} \right)$$

n_{φ} est toujours une compression.

n_{θ} est une compression pour $0 < \varphi < 52^\circ$ et une traction pour $\varphi > 52^\circ$.

■ Cas 2 : charge q uniforme par unité de surface projetée

$$n_{\varphi} = q \frac{R}{2} \left(1 - \frac{\sin^2 \varphi_0}{\sin^2 \varphi} \right)$$

$$n_{\theta} = q \frac{R}{2} \left(\cos 2\varphi + \frac{\sin^2 \varphi_0}{\sin^2 \varphi} \right)$$

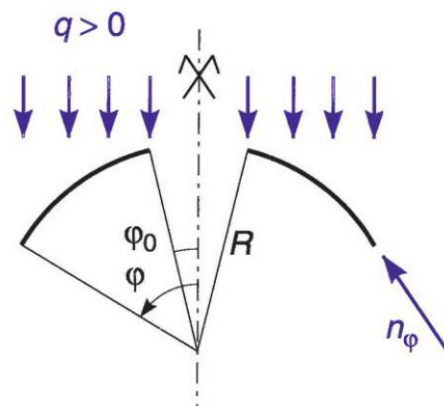


Figure 7.3

$$\text{Si } \varphi_0 = 0 \quad n_{\varphi} = q \frac{R}{2} \quad n_{\theta} = q \frac{R}{2} \cos 2\varphi$$

■ **Cas 3 : charge P répartie par unité de longueur sur la circonférence le long d'un parallèle**

$$\varphi < \varphi_1 \quad n_\varphi = n_\theta = 0$$

$$\varphi \geq \varphi_1 \quad n_\varphi = -n_\theta = \frac{P \sin \varphi_1}{\sin^2 \varphi}$$

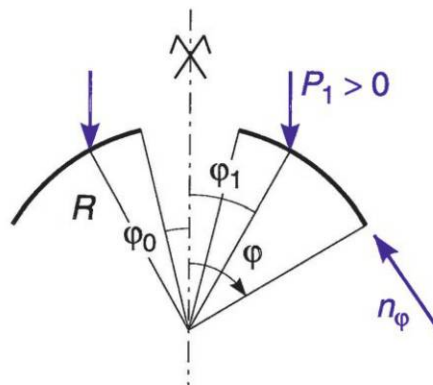


Figure 7.4

■ **Cas 4 : pression d'un liquide de poids volumique ϖ**

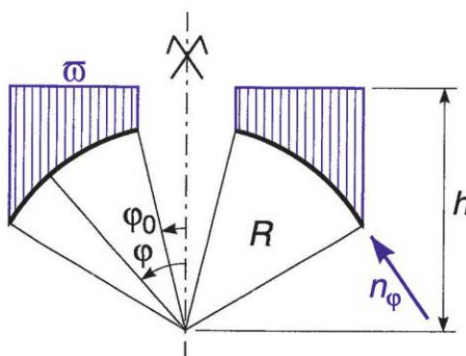


Figure 7.5

$$n_\varphi = \varpi R^2 \left[\frac{h}{2R} \left(1 - \frac{\sin^2 \varphi_0}{\sin^2 \varphi} \right) + \frac{\cos^3 \varphi - \cos^3 \varphi_0}{3 \sin^2 \varphi} \right]$$

$$n_\theta = \varpi R^2 \left[\frac{h}{2R} \left(1 + \frac{\sin^2 \varphi_0}{\sin^2 \varphi} \right) - \frac{\cos^3 \varphi - \cos^3 \varphi_0}{3 \sin^2 \varphi} - \cos \varphi \right]$$

$$\text{Si } \varphi_0 = 0 \quad n_\varphi = \varpi R^2 \left(\frac{h}{2R} + \frac{\cos^3 \varphi}{3 \sin^2 \varphi} \right)$$

$$n_\theta = \varpi R^2 \left(\frac{h}{2R} - \frac{\cos^3 \varphi}{3 \sin^2 \varphi} - \cos \varphi \right)$$

7.1.3 Voile mince en forme de paraboloïde hyperbolique, sur un plan rectangulaire

On considère le paraboloïde hyperbolique de la figure 7.6. L'équation de la surface moyenne du voile est de la forme :

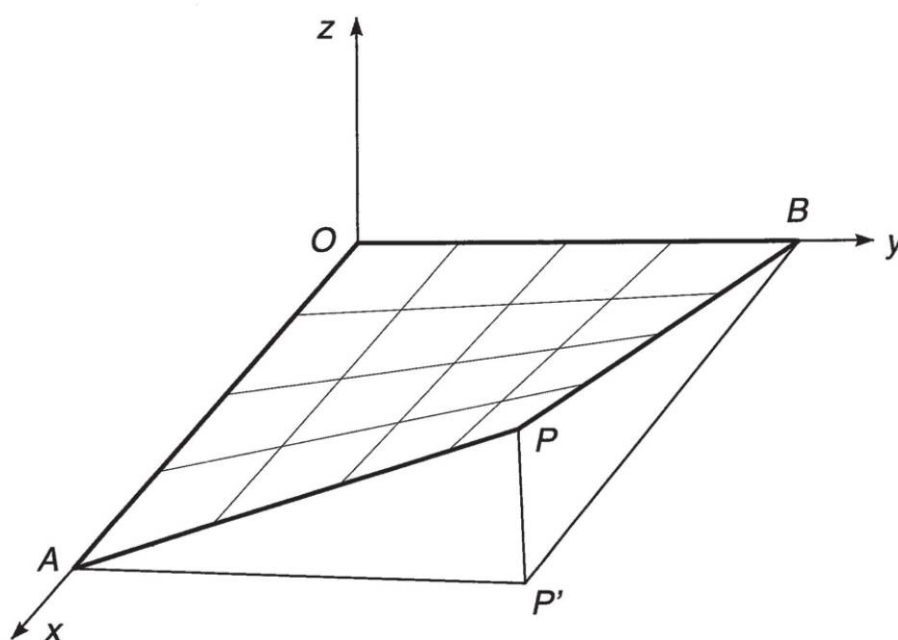


Figure 7.6 $z = kxy$, k étant une constante

La surface comprend deux systèmes de génératrices rectilignes, respectivement parallèles aux plans xOz et yOz .

Supposons le voile soumis uniquement à une charge constante p , par unité de surface en projection horizontale, dirigée de haut en bas.

Un élément quelconque de ce voile limité par quatre génératrices est en équilibre sous l'action de la charge extérieure et des tensions de cisaillement θ agissant le long des bords latéraux.

On a, *par unité de longueur* de génératrice :

$$\theta = \frac{p}{2k} \quad (7.5)$$

Les tensions normales de compression et de traction sont égales à θ en valeur absolue, et agissent sur les bissectrices des angles formées par les génératrices ; tout se passe comme si le voile était constitué d'une série de voûtes comprimées de concavité tournée vers le bas, et d'une série de voûtes tendues, de concavité tournée vers le haut ; toutefois, on doit tenir compte dans les angles, des moments de flexion (moments secondaires).

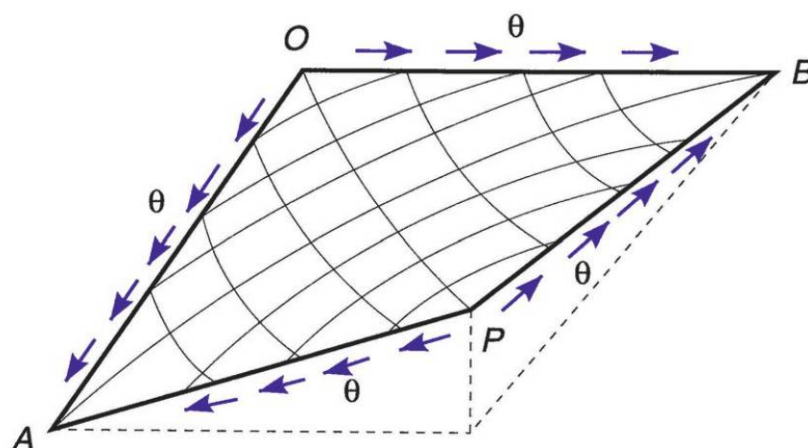


Figure 7.7

Le long des rives, les tensions de cisaillement sont transmises aux poutres de bordure, qui sont ainsi sollicitées par un effort normal de compression ou de traction, variant linéairement d'une extrémité à l'autre extrémité, de 0 à θL (L étant la longueur de la rive considérée).

7.2 Coques cylindriques fléchies

7.2.1 Formules de base

On considère une coque cylindrique de rayon R et d'épaisseur h , soumise à une densité de charge $p(x)$ constante le long d'un parallèle.

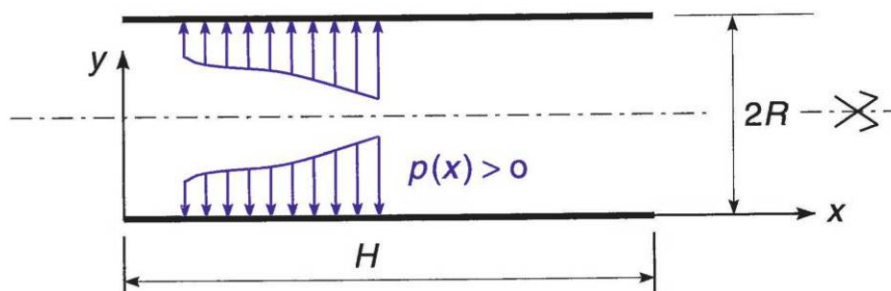


Figure 7.8

On peut démontrer que la déformée y doit satisfaire l'équation différentielle :

$$D \frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2} y + p(x) = 0 \quad (7.6)$$

en posant $D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$ (voir formule 6.1).

Cette formule est de la même forme que la formule (5.30) en identifiant EI à D et kb à $\frac{Eh}{R^2}$.

On pose :

$$\gamma = \sqrt[4]{\frac{3(1 - \nu^2)}{R^2 h^2}} \quad (7.7)$$

Ainsi, l'étude de la coque cylindrique peut être conduite à partir des méthodes exposées au paragraphe 5.4 qui permettent de déterminer $y(x)$, $y'(x)$, $M(x)$ et $V(x)$ le long d'un méridien.

Le long d'un parallèle à une distance x , l'axisymétrie du chargement conduit à :

$$N(x) = \frac{Eh}{R} y(x) \quad (7.8)$$

7.2.2 Application aux coques cylindriques des réservoirs

Les coques cylindriques des réservoirs sont en général caractérisées par une paroi libre en tête et à translation horizontale bloquée en pied.

Les tableaux de valeurs numériques ou les formules approchées donnés ci-après supposent $\nu = 0$. Les résultats sont très peu sensibles aux variations de ν .

Par ailleurs, on pose $\beta = \frac{H^2}{2Rh}$.

Les fonctions $W(x)$, $X(x)$, $Y(x)$ et $Z(x)$ sont celles définies dans le paragraphe 5.4.1.

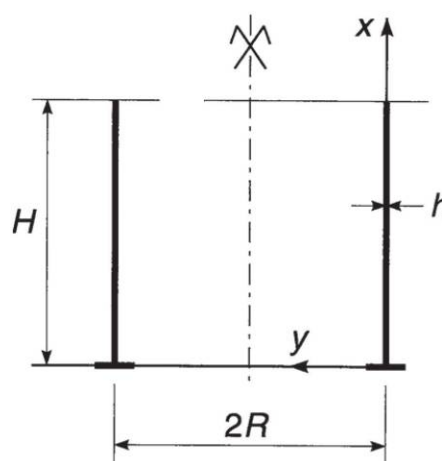


Figure 7.9

7.2.3 Formulaire des coques articulées à la base

■ Cas 1 : pression hydrostatique

$$y(x) = -\alpha_1 \frac{p_0 R^2}{Eh}$$

$$N(x) = -\alpha_1 p_0 R$$

$$y'(0) = -\alpha_2 \frac{p_0 R^2}{EHh}$$

$$V(0) = \alpha_3 p_0 H$$

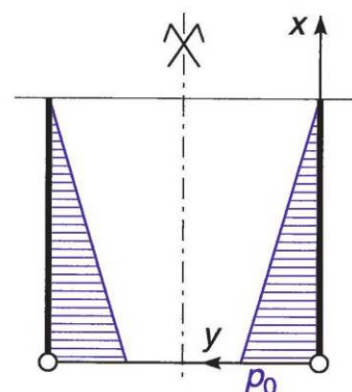


Figure 7.10

Tableau 7.1 Valeurs de α_1

$\beta \backslash \frac{x}{H}$	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
0,4	+0,474	10,440	10,395	+0,352	+0,308	+0,284	+0,215	+0,165	+0,111	+0,057
0,8	+0,423	+0,402	+0,381	+0,358	+0,330	+0,297	+0,249	+0,202	+0,145	+0,076
1,2	+0,350	+0,355	+0,361	+0,362	+0,358	+0,343	+0,309	+0,256	+0,186	+0,098
1,6	+0,271	+0,303	+0,341	+0,369	+0,335	+0,335	+0,362	+0,314	+0,233	+0,124
2,0	+0,203	+0,260	+0,321	+0,373	+0,411	+0,434	+0,419	+0,369	+0,280	+0,151
3,0	+0,074	+0,179	+0,281	+0,375	+0,449	+0,506	+0,519	+0,479	+0,375	+0,210
4,0	+0,017	+0,137	+0,253	+0,367	+0,469	+0,545	+0,579	+0,553	+0,447	+0,256
5,0	-0,003	+0,114	+0,235	+0,356	+0,469	+0,562	+0,617	+0,606	+0,503	+0,294
6,0	-0,011	+0,103	+0,223	+0,343	+0,463	+0,566	+0,639	+0,643	+0,547	+0,327
8,0	-0,016	+0,096	+0,208	+0,324	+0,443	+0,664	+0,661	+0,697	+0,621	+0,386
10,0	-0,006	+0,095	+0,200	+0,311	+0,428	+0,553	+0,666	+0,730	+0,678	+0,433
12,0	-0,002	+0,097	+0,197	+0,302	+0,417	+0,541	+0,664	+0,760	+0,720	+0,477
14,0	0,000	+0,098	+0,197	+0,299	+0,408	+0,531	+0,659	+0,761	+0,762	+0,513
16,0	+0,002	+0,100	+0,198	+0,299	+0,403	+0,521	+0,650	+0,764	+0,776	+0,543

Tableau 7.2 Valeurs de α_2 et de α_3

β	0,4	0,8	1,2	1,6	2	3	4	5	6	8	10	12	14	16
α_2	0,59	0,78	1,17	1,29	1,60	2,19	2,72	3,17	3,56	4,260	4,890	5,450	5,960	6,450
α_3	0,25	0,23	0,22	0,20	0,19	0,16	0,14	0,12	0,11	0,096	0,087	0,079	0,073	0,068

Valeurs approchées pour $\beta > 6$

L'effort normal dans les parallèles est maximal pour x_1 tel que :

$$W(x_1) + \frac{1}{\gamma H} = 0$$

et a pour valeur :

$$N = \left[1 - \frac{x_1}{H} + Z(x_1) \right] p_0 R$$

Le moment de flexion le long d'un méridien est maximal pour :

$$x_2 = 0,6\sqrt{Rh}$$

et a pour valeur $M = 0,094 p_0 R h$.

L'effort tranchant est maximal à la base :

$$V = \frac{p_0}{2\gamma}$$

La rotation est maximale à la base :

$$y' = -(\gamma H - 1) \frac{p_0 R^2}{EHh}$$

■ Cas 2 : pression uniforme

$$y(x) = -\alpha_4 \frac{pR^2}{Eh}$$

$$N(x) = -\alpha_4 pR$$

$$y'(0) = -(1 + \alpha_2) \frac{pR^2}{EHh}$$

$$V(0) = \alpha_3 pH$$

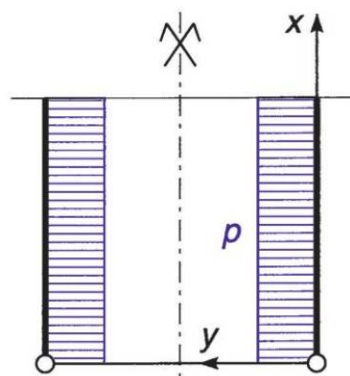


Figure 7.11

Tableau 7.3 Valeurs de α_4

$\frac{x}{H}$ β	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
0,4	+1,474	+1,340	+1,195	+1,052	+0,903	+0,764	+0,615	+0,465	+0,311	+0,154
0,8	+1,423	+1,302	+1,181	+1,053	+0,930	+0,797	+0,649	+0,502	+0,345	+0,166
1,2	+1,350	+1,255	+1,161	+1,062	+0,958	+0,843	+0,709	+0,556	+0,386	+0,198
1,6	+1,271	+1,203	+1,141	+1,069	+0,985	+0,885	+0,756	+0,614	+0,433	+0,224
2,0	+1,205	+1,160	+1,121	+1,073	+1,011	+0,934	+0,819	+0,669	+0,480	+0,251
3,0	+1,074	+1,079	+1,081	+1,075	+1,049	+1,005	+0,919	+0,779	+0,575	+0,310
4,0	+1,017	+1,037	+1,053	+1,067	+1,069	+1,045	+0,979	+0,853	+0,647	+0,356
5,0	+0,992	+1,014	+1,035	+1,056	+1,069	+1,062	+1,017	+0,906	+0,703	+0,394
6,0	+0,989	+1,003	+1,023	+1,043	+1,063	+1,066	+1,039	+0,943	+0,747	+0,427
8,0	+0,985	+0,996	+1,008	+1,024	+1,043	+1,064	+1,061	+0,997	+0,821	+0,488
10,0	+0,992	+0,995	+1,000	+1,011	+1,028	+1,052	+1,066	+1,030	+0,878	+0,533
12,0	+0,998	+0,997	+0,997	+1,002	+1,017	+1,041	+1,064	+1,050	+0,920	+0,577
14,0	+1,000	+0,998	+0,997	+0,999	+1,008	+1,031	+1,059	+1,061	+0,952	+0,613
16,0	+1,002	+1,000	+0,998	+0,999	+1,003	+1,021	+1,050	+1,064	+0,976	+0,643

Valeurs approchées pour $\beta > 6$

L'effort normal dans les parallèles est maximal pour $x > 0,3H$ et a pour valeur $N = pR$.

Le moment de flexion le long d'un méridien est maximal pour $x_2 = 0,6\sqrt{Rh}$ et a pour valeur $M = 0,094pRh$.

L'effort tranchant est maximal à la base $V = \frac{p}{2\gamma}$.

La rotation est maximale à la base $y' = -\gamma \frac{pR^2}{Eh}$.

■ Cas 3 : couple à la base

$$\begin{aligned}
 y(x) &= \alpha_5 \frac{C_0 R^2}{EhH^2} & N(x) &= \alpha_5 \frac{C_0 R}{H^2} \\
 M(x) &= -\alpha_6 C_0 & y'(0) &= \alpha_7 \frac{C_0 R^2}{EhH^3} \\
 V(0) &= \alpha_8 \frac{C_0}{H}
 \end{aligned}$$

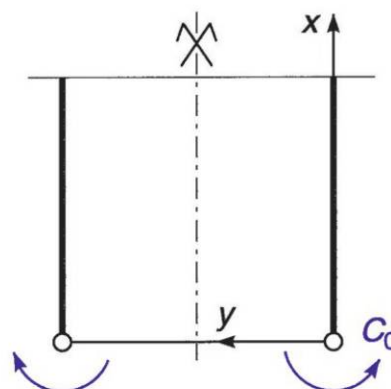


Figure 7.12

Tableau 7.4 Valeurs de α_5

$\frac{x}{H}$	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
β										
0,4	+ 2,70	+ 2,50	+ 2,30	+ 2,12	+ 1,91	+ 1,69	+ 1,41	+ 1,13	+ 0,80	+ 0,44
0,8	+ 2,02	+ 2,06	+ 2,10	+ 2,14	+ 2,10	+ 2,02	+ 1,95	+ 1,75	+ 1,39	+ 0,80
1,2	+ 1,06	+ 1,42	+ 1,79	+ 2,03	+ 2,46	+ 2,65	+ 2,80	+ 2,60	+ 2,22	+ 1,37
1,6	+ 0,12	+ 0,79	+ 1,43	+ 2,04	+ 2,72	+ 3,25	+ 3,56	+ 3,59	+ 3,13	+ 2,01
2,0	- 0,68	+ 0,22	+ 1,10	+ 2,02	+ 2,90	+ 3,69	+ 4,30	+ 4,54	+ 4,08	+ 2,75
3,0	- 1,78	- 0,71	+ 0,43	+ 1,60	+ 2,95	+ 4,29	+ 5,66	+ 6,58	+ 6,55	+ 4,73
4,0	- 1,67	- 1,00	- 0,08	+ 1,04	+ 2,47	+ 4,31	+ 6,34	+ 8,19	+ 8,82	+ 6,81
5,0	- 1,54	- 1,03	- 0,42	+ 0,45	+ 1,86	+ 3,93	+ 6,60	+ 9,41	+ 11,03	+ 9,02
6,0	- 1,04	- 0,66	- 0,59	- 0,05	+ 1,21	+ 3,34	+ 6,54	+ 10,28	+ 13,08	+ 11,41
8,0	- 0,54	- 0,53	- 0,73	- 0,67	- 0,02	+ 2,05	+ 5,97	+ 11,37	+ 16,62	+ 16,63
10,0	+ 0,21	- 0,23	- 0,64	- 0,94	- 0,73	+ 0,82	+ 4,79	+ 11,63	+ 19,48	+ 20,67
12,0	+ 0,32	- 0,05	- 0,45	- 0,96	- 1,15	- 0,18	+ 3,52	+ 11,27	+ 21,80	+ 25,73
14,0	+ 0,26	+ 0,04	- 0,28	- 0,76	- 1,29	- 0,87	+ 2,29	+ 10,55	+ 23,50	+ 30,34
16,0	+ 0,22	+ 0,07	- 0,08	- 0,64	- 1,28	- 1,30	+ 1,12	+ 9,67	+ 24,63	+ 34,65

Tableau 7.5 Valeurs de α_6

$\frac{x}{H}$ β	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0
0,4	+ 0,013	+ 0,051	+ 0,109	+ 0,196	+ 0,296	+ 0,414	+ 0,547	+ 0,692	+ 0,843	+ 1,000
0,8	+ 0,009	+ 0,040	+ 0,090	+ 0,164	+ 0,253	+ 0,375	+ 0,503	+ 0,659	+ 0,824	+ 1,000
1,2	+ 0,006	+ 0,027	+ 0,063	+ 0,125	+ 0,206	+ 0,316	+ 0,454	+ 0,616	+ 0,802	+ 1,000
1,6	+ 0,003	+ 0,011	+ 0,035	+ 0,078	+ 0,152	+ 0,253	+ 0,393	+ 0,570	+ 0,775	+ 1,000
2,0	- 0,002	- 0,002	+ 0,012	+ 0,034	+ 0,096	+ 0,193	+ 0,340	+ 0,519	+ 0,748	+ 1,000
3,0	- 0,007	- 0,022	- 0,030	- 0,029	+ 0,010	+ 0,087	+ 0,227	+ 0,426	+ 0,692	+ 1,000
4,0	- 0,008	- 0,026	- 0,044	- 0,051	- 0,034	+ 0,023	+ 0,150	+ 0,354	+ 0,645	+ 1,000
5,0	- 0,007	- 0,024	- 0,045	- 0,061	- 0,057	- 0,015	+ 0,095	+ 0,296	+ 0,605	+ 1,000
6,0	- 0,005	- 0,018	- 0,040	- 0,058	- 0,065	- 0,037	+ 0,057	+ 0,252	+ 0,572	+ 1,000
8,0	- 0,001	- 0,009	- 0,022	- 0,044	- 0,068	- 0,062	+ 0,002	+ 0,178	+ 0,515	+ 1,000
10,0	0,000	- 0,002	- 0,009	- 0,028	- 0,053	- 0,067	- 0,031	+ 0,123	+ 0,467	+ 1,000
12,0	0,000	0,000	- 0,003	- 0,016	- 0,040	- 0,064	- 0,049	+ 0,081	+ 0,424	+ 1,000
14,0	0,000	0,000	0,000	- 0,008	- 0,029	- 0,059	- 0,060	+ 0,048	+ 0,387	+ 1,000
16,0	0,000	0,000	+ 0,002	- 0,003	- 0,021	- 0,051	- 0,068	+ 0,025	+ 0,354	+ 1,000

Tableau 7.6 Valeurs de α_7 et de α_8

β	0,4	0,8	1,2	1,6	2	3	4	5	6	8	10	12	14	16
α_7	4,82	9,89	18,5	26,3	37,1	67,2	104	144	190	292	408	536	675	825
α_8	1,59	1,75	2,00	2,28	2,57	3,18	3,68	4,10	4,49	5,18	5,81	6,36	6,83	7,36

Valeurs approchées pour $\beta > 6$

L'effort tranchant est maximal à la base : $V = C_0 \gamma$.

La rotation est maximale à la base $y' = 2\gamma^3 \frac{C_0 R^2}{Eh}$.

7.2.4 Formulaire des coques encastrées à la base

■ Cas 1 : pression hydrostatatique

Le long d'un méridien :

$$M(x) = \alpha_9 p_0 H^2$$

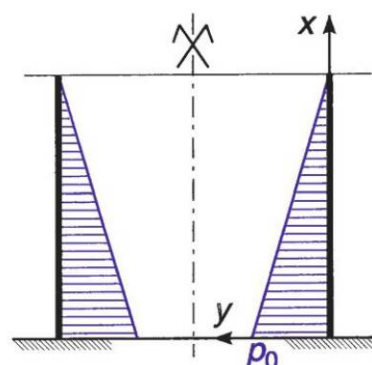


Figure 7.13

Tableau 7.7 Valeurs de α_9

$\frac{x}{H}$ β	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0
0,4	+0,0005	+0,0014	+0,0021	+0,0007	-0,0042	-0,0150	-0,0302	-0,0529	-0,0816	-0,1205
0,8	+0,0011	+0,0037	+0,0063	+0,0080	+0,0070	+0,0023	-0,0068	-0,0224	-0,0465	-0,0795
1,2	+0,0012	+0,0042	+0,0077	+0,0103	+0,0112	+0,0090	+0,0022	-0,0108	-0,0311	-0,0602
1,6	+0,0011	+0,0041	+0,0075	+0,0107	+0,0121	+0,0111	+0,0055	-0,0051	-0,0232	-0,0505
2,0	+0,0010	-0,0035	+0,0068	+0,0099	+0,0120	+0,0116	+0,0075	-0,0021	-0,0185	-0,0436
3,0	+0,0006	+0,0024	+0,0047	+0,0071	+0,0090	+0,0097	+0,0077	+0,0012	-0,0119	-0,0333
4,0	+0,0003	+0,0015	+0,0028	+0,0047	+0,0066	+0,0077	+0,0069	+0,0023	-0,0080	-0,0268
5,0	+0,0002	+0,0008	+0,0016	+0,0029	+0,0046	+0,0059	+0,0059	+0,0028	-0,0058	-0,0222
6,0	+0,0001	+0,0003	+0,0008	+0,0019	+0,0032	+0,0046	+0,0051	+0,0029	-0,0041	-0,0187
8,0	0,0000	+0,0001	+0,0002	+0,0008	+0,0016	+0,0028	+0,0038	+0,0029	-0,0022	-0,0146
10,0	0,0000	0,0000	+0,0001	+0,0004	+0,0007	+0,0019	+0,0029	+0,0028	-0,0012	-0,0122
12,0	0,0000	-0,0001	+0,0001	+0,0002	+0,0003	+0,0013	+0,0023	+0,0026	-0,0005	-0,0104
14,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	+0,0001	+0,0008	+0,0019	+0,0023	-0,0001	-0,0090
16,0	0,0000	0,0000	-0,0001	-0,0002	-0,0001	+0,0004	+0,0013	+0,0019	+0,0001	-0,0079

L'effort normal $N(x)$ selon un parallèle et l'effort tranchant à la base $V(0)$ sont obtenus en superposant les résultats des cas 1 et 3 de la coque articulée à la base, en retenant $C_0 = -M(0)$ du tableau 7.7.

Valeurs approchées pour $\beta > 6$

$$M(0) = -\frac{p_0}{2\gamma^2} \left(1 - \frac{1}{\gamma H} \right) \quad V(0) = \frac{p_0}{2\gamma} \left(2 - \frac{1}{\gamma H} \right)$$

Sur la hauteur de la coque, le moment s'annule pour $x_0 = \frac{\arctan\left(\frac{2\gamma^2 C_0}{p_0}\right)}{\gamma}$

Le moment positif est maximal à l'abscisse $x_1 = x_0 + 0,6\sqrt{Rb}$

Sa valeur est de $M = e^{-\gamma x_1} \left(\frac{p_0 \sin \gamma x_1}{2\gamma^2} - C_0 \cos \gamma x_1 \right)$

L'effort normal est maximal à l'abscisse x_2 telle que :

$$W(x_2) + \frac{2\gamma^2 C_0}{p_0} Y(x_2) + \frac{1}{\gamma H} = 0$$

et a pour valeur :

$$N = \left[1 - \frac{x_2}{H} + Z(x_2) - \frac{2C_0\gamma^2}{p_0} X(x_2) \right] p_0 R$$

■ Cas 2 : pression uniforme

Le long d'un méridien :

$$M(x) = \alpha_{10} p H^2$$

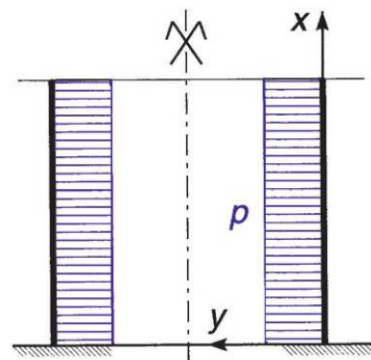


Figure 7.14

Tableau 7.8 Valeurs de α_{10}

$\frac{x}{H}$ β	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0
0,4	-0,0023	-0,0093	-0,0227	-0,0439	-0,0710	-0,1018	-0,1455	-0,2000	-0,2593	-0,3310
0,8	0,0000	-0,0006	-0,0025	-0,0083	-0,0185	-0,0362	-0,0594	-0,0917	-0,1325	-0,1835
1,2	+0,0008	+0,0026	+0,0037	+0,0029	-0,0009	-0,0089	-0,0227	-0,0468	-0,0815	-0,1178
1,6	+0,0011	+0,0036	+0,0062	+0,0077	+0,0068	+0,0011	-0,0093	-0,0267	-0,0529	-0,0876
2,0	+0,0010	+0,0036	+0,0066	+0,0088	+0,0089	+0,0059	-0,0019	-0,0167	-0,0389	-0,0719
3,0	+0,0007	+0,0026	+0,0051	+0,0074	+0,0091	+0,0083	+0,0042	-0,0053	-0,0223	-0,0483
4,0	+0,0004	+0,0015	+0,0033	+0,0052	+0,0068	+0,0076	+0,0053	-0,0013	-0,0145	-0,0365
5,0	+0,0002	+0,0008	+0,0019	+0,0035	+0,0051	+0,0061	+0,0052	+0,0007	-0,0101	-0,0293
6,0	+0,0001	+0,0004	+0,0011	+0,0022	+0,0036	+0,0049	+0,0048	+0,0017	-0,0073	-0,0242
8,0	0,0000	+0,0001	+0,0003	+0,0008	+0,0018	+0,0031	+0,0038	+0,0024	-0,0040	-0,0184
10,0	0,0000	-0,0001	0,0000	+0,0002	+0,0009	+0,0021	+0,0030	+0,0026	-0,0022	-0,0147
12,0	0,0000	0,0000	-0,0001	0,0000	+0,0004	+0,0014	+0,0024	+0,0022	-0,0012	-0,0123
14,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	+0,0002	+0,0010	+0,0018	+0,0021	-0,0007	-0,0105
16,0	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0001	+0,0001	+0,0006	+0,0012	+0,0020	-0,0005	-0,0091

L'effort normal $N(x)$ selon un parallèle et l'effort tranchant à la base $V(0)$ sont obtenus en superposant les résultats des cas 2 et 3 de la coque articulée à la base, en retenant $C_0 = -M(0)$ du tableau 7.8.

Valeurs approchées pour $\beta > 6$

$$M(0) = -\frac{p}{2\gamma^2} \quad V(0) = \frac{p}{\gamma}$$

7.2.5 Coques partiellement encastrées en pied et soumises à une pression hydrostatique

L'élasticité de l'appui est caractérisée par :

$$K = \frac{y'(0)}{C_0}$$

Les sollicitations sont déterminées en superposant les résultats des cas 1 et 3 des coques articulées à la base (cf. paragraphe 7.2.3).

Au préalable, on calcule le couple C_0 :

$$C_0 = \frac{-y'_1}{y'_3 + K}$$

où y'_1 et y'_3 représentent les rotations à la base respectivement sous l'effet de la pression hydrostatique et sous celui d'un couple unité.

Les formules du paragraphe 7.2.4 (Cas 1) permettant les calculs de x_0 , x_1 , $M(x_1)$, x_2 et $N(x_2)$ sont valables en attribuant à C_0 la valeur trouvée ci-dessus.

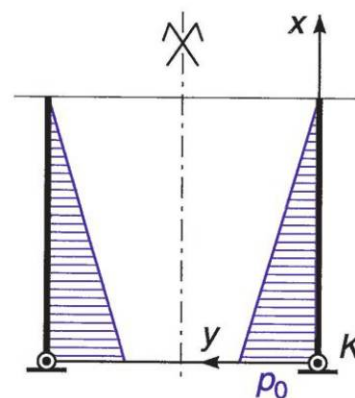


Figure 7.15

C

Domaine

**plastique et
comportements
particuliers**

8

Stabilité de l'équilibre élastique

Remarque

Dans l'étude des problèmes de flambement, déversement, cloquage, on tient compte de l'influence des déformations sur les conditions d'équilibre ; à partir d'une certaine valeur des forces extérieures, dite valeur critique, les déformations ne sont plus proportionnelles aux forces extérieures, et le principe de superposition n'est plus applicable. On rentre dans le domaine plastique du matériau.

8.1 Flambement des pièces élancées

8.1.1 Pièce de section constante, comprimée par une charge axiale : formule d'Euler

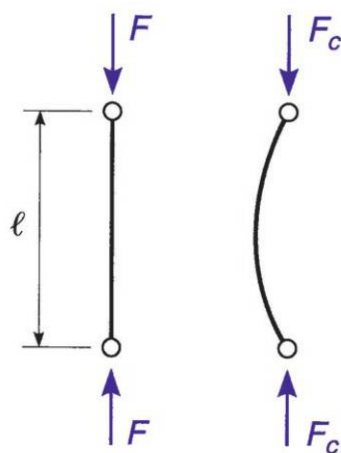


Figure 8.1

On considère une pièce droite à plan moyen, de longueur ℓ , dont la section Ω présente un moment quadratique minimal I , articulée à ses extrémités et comprimée par une force F croissante.

Le flambement se produit lorsque la force F atteint la valeur :

$$F_c = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} \quad (8.1)$$

F_c est la force critique de flambement appelée aussi **charge critique d'Euler**.

Autre écriture de la formule (8.1) :

en posant $\rho = \sqrt{\frac{I}{\Omega}}$ *rayon de giration* de la section, calculé avec I

minimal, et $\lambda = \frac{\ell}{\rho}$ *élancement* de la pièce,

on trouve pour valeur de la contrainte critique de flambement :

$$\sigma_c = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (8.2)$$

Pour une pièce soumise à des liaisons diverses à ses extrémités, la charge critique est donnée par la formule générale :

$$F_c = m \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} \quad (8.3)$$

avec $m = 1$ si la pièce est articulée à ses extrémités.

On appelle *longueur libre de flambement* ℓ_0 , la longueur de la pièce articulée à ses deux extrémités qui aurait la même force critique F_c ; il résulte des formules (8.1) et (8.3) :

$$\ell_0 = \frac{\ell}{\sqrt{m}} \quad (8.4)$$

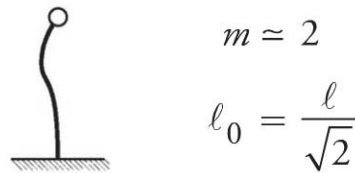
La pratique revient donc à utiliser la formule (8.1) en substituant la longueur libre ℓ_0 à ℓ .

Cas de la pièce parfaitement encastree à ses extrémités



Figure 8.2

Cas de la pièce articulée à une extrémité et parfaitement encastrée à l'autre



$$m \approx 2$$

$$\ell_0 = \frac{\ell}{\sqrt{2}}$$

Figure 8.3

Cas de la pièce encastrée à une extrémité et libre à l'autre

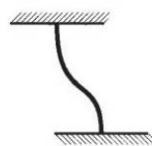


$$m = \frac{1}{4}$$

$$\ell_0 = 2\ell$$

Figure 8.4

Cas de la pièce encastrée à ses extrémités, celles-ci pouvant subir des translations perpendiculaires à l'axe initial de la pièce



$$m = 1$$

$$\ell_0 = \ell$$

Figure 8.5

Cas de la pièce élastiquement tenue à ses extrémités

Nœuds non déplaçables latéralement

Les encastremements partiels sont caractérisés par les coefficients k_A et k_B (couple/rotation).

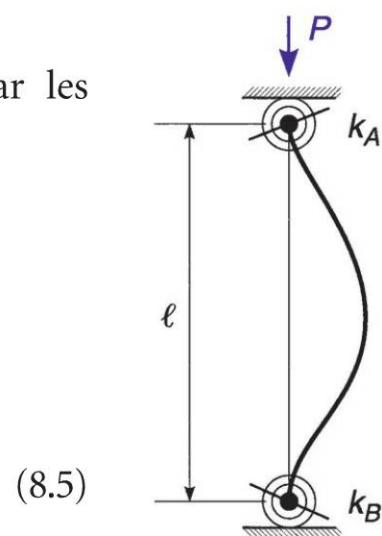
On pose :

$$p = \frac{1}{k_A k_B} \quad s = \frac{1}{k_A} + \frac{1}{k_B} \quad k = \frac{EI}{\ell}$$

et

$$K = \frac{3k^2 p + ks + 0,32}{3k^2 p + 0,7ks + 0,16}$$

$$F_c = K^2 \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} \quad \ell_0 = \frac{\ell}{K}$$



(8.5)

Figure 8.6

Nœuds déplaçables latéralement

On pose :

$$\begin{aligned}
 s &= \frac{1}{k_A} + \frac{1}{k_B} & k &= \frac{EI}{\ell} \\
 \rho_A &= \frac{k}{k_A} & \rho_B &= \frac{k}{k_B} \\
 \alpha_A &= \frac{0,4 + \rho_B}{0,8 + ks} & \alpha_B &= \frac{0,4 + \rho_A}{0,8 + ks} \\
 K_A &= \alpha_A^2 + \frac{\pi^2 \rho_A \alpha_A}{4} & K_B &= \alpha_B^2 + \frac{\pi^2 \rho_B \alpha_B}{4}
 \end{aligned}$$

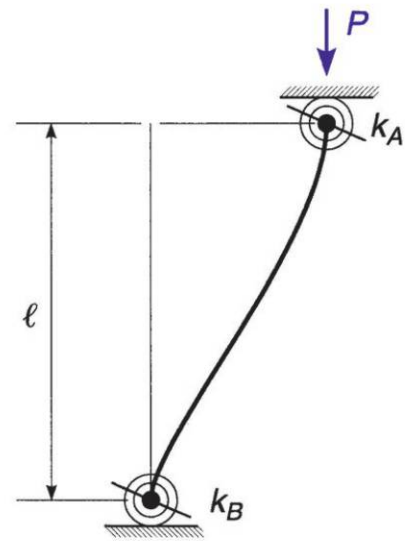


Figure 8.7

$$\text{et : } K = \text{Max}(K_A \text{ et } K_B) \quad (8.6)$$

$$F_c = \frac{\pi^2 EI}{4K\ell^2} \quad \ell_0 = 2\ell\sqrt{K}$$

8.1.2 Pièce verticale comprimée par des charges axiales appliquées sur la hauteur

- **Cas 1 :** La pièce AB, de longueur ℓ et de section constante, est encastrée à sa base A et libre à son extrémité supérieure B.

Cas d'une charge p par unité de longueur

La valeur de la charge critique de flambement F_c est donnée par :

$$F_c = \frac{7,83EI}{\ell^2} \quad \ell_0 = 1,12\ell \quad (8.7)$$

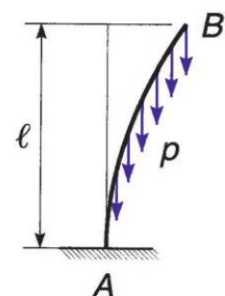


Figure 8.8

Cas de charges P_i à des niveaux x_i

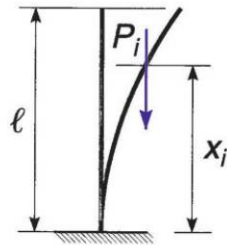


Figure 8.9

On peut admettre :

$$\left. \begin{aligned} F_c &= \frac{\pi^2 EI \sum P_i}{4\ell^2 \sum P_i \left(1 - \cos \frac{\pi x_i}{2\ell}\right)} \\ \ell_0 &= 2\ell \sqrt{\frac{\sum P_i \left(1 - \cos \frac{\pi x_i}{2\ell}\right)}{\sum P_i}} \end{aligned} \right\} \quad (8.8)$$

Cas d'une charge p par unité de longueur et d'une charge concentrée P en tête

Valeur de la charge critique de flambement :

$$F_c = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2 \left(\frac{4P}{P + p\ell} + 1,26 \right)}$$

Longueur libre de flambement :

$$\ell_0 = \ell \sqrt{\frac{4P}{P + p\ell} + 1,26}$$

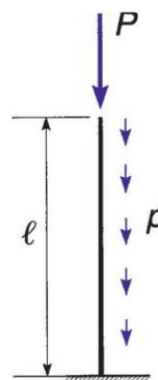


Figure 8.10

- **Cas 2 :** La pièce AB, de longueur ℓ et de section constante, est articulée à ses deux extrémités.

Cas d'une charge p par unité de longueur et d'une charge concentrée P à ses extrémités

Première situation

Valeur de la charge critique de flambement :

$$F_c = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2 \left(0,7 \frac{P}{P + \frac{p\ell}{2}} + 0,3 \right)}$$

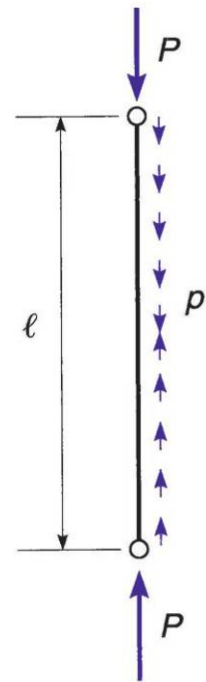


Figure 8.11

Longueur libre de flambement :

$$\ell_0 = \ell \sqrt{0,7 \frac{P}{P + \frac{p\ell}{2}} + 0,3}$$

Deuxième situation

Valeur de la charge critique de flambement :

$$F_c = \frac{2\pi^2 EI}{\ell^2 \left(1 + \frac{P}{P + p\ell} \right)}$$

Longueur libre de flambement :

$$\ell_0 = \frac{\ell}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{P}{P + p\ell}}$$

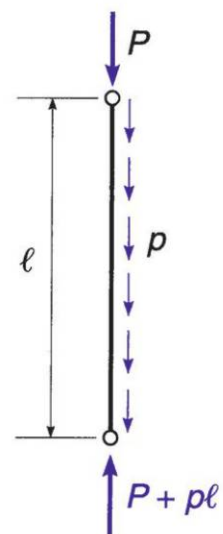


Figure 8.12

8.1.3 Pièce verticale avec encastrement partiel en pied

La pièce verticale supporte en tête, supposée libre, une force de compression axiale P ; l'encastrement partiel en pied est caractérisé par le coefficient k (couple/rotation).

$$F_c = \frac{\pi^2 EIk}{4k\ell^2 + \pi^2 EI\ell} \quad (8.9)$$

$$\ell_0 = 2\ell \sqrt{1 + \frac{\pi^2 EI}{4k\ell}}$$

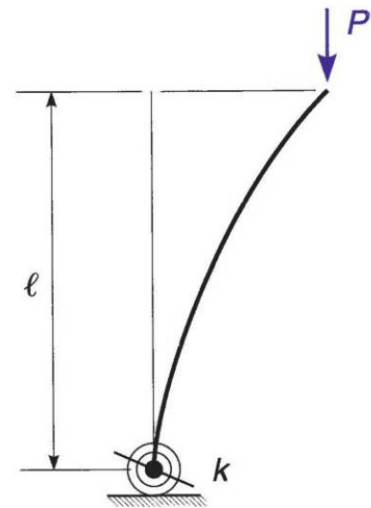


Figure 8.13

8.1.4 Pièce comprimée dans un milieu élastique

Le milieu élastique est caractérisé par k , module ayant la dimension d'une force par le carré d'une longueur.

Valeur de la charge critique de flambement :

$$F_c = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} \left(m^2 + \frac{k\ell^4}{m^2 \pi^4 EI} \right) \quad (8.10)$$

avec

$$m = \frac{\ell}{\pi} \sqrt[4]{\frac{k}{EI}}$$

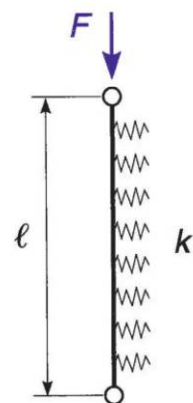


Figure 8.14

Longueur libre de flambement :

$$\ell_0 = \frac{\ell}{\sqrt{m^2 + \frac{k\ell^4}{m^2 \pi^4 EI}}}$$

8.1.5 Pièce à inertie variable, comprimée par une charge axiale

La pièce AB , de longueur ℓ , est articulée à ses extrémités. La variation de section est précisée sur la figure ; I_1 et I_2 sont les moments quadratiques minimaux des sections.

La valeur de charge critique de flambement est donnée par :

$$F_c = k \frac{EI_2}{\ell^2} \quad (8.11)$$

$$\ell_0 = \frac{\pi}{\sqrt{k}} \ell$$

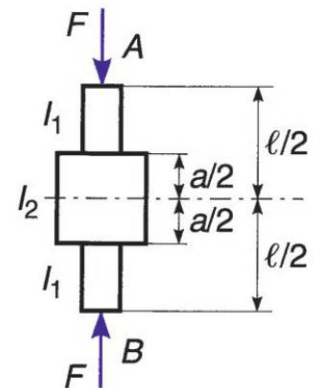


Figure 8.15

Le tableau suivant fournit la valeur du coefficient k en fonction des rapports $\frac{a}{\ell}$ et $\frac{I_1}{I_2}$.

Tableau 8.1 Coefficient k

$\frac{I_1}{I_2} \backslash \frac{a}{\ell}$	0,20	0,40	0,60	0,80
0,01	0,15	0,27	0,60	2,26
0,10	1,47	2,40	4,50	8,59
0,20	2,80	4,22	6,69	9,33
0,40	5,09	6,68	8,51	9,67
0,60	6,98	8,19	9,24	9,78
0,80	8,55	9,18	9,63	9,84

8.1.6 Poutre comprimée et fléchiée, sur appuis simples

Soit une poutre AB portant dans son plan moyen des charges qui produisent un moment de flexion $\mu(x)$ et recevant un effort normal de compression N .

Le moment de flexion, dans la section d'abscisse x et d'ordonnée y a pour expression :

$$M = \mu(x) - Ny$$

L'action de la force N majore le moment $\mu(x)$ de la quantité Ny (où y est négatif).

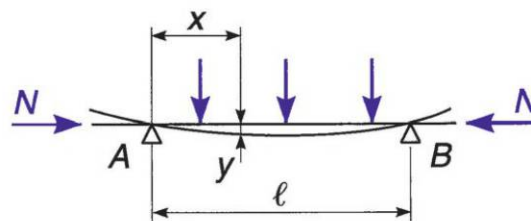


Figure 8.16

Le moment de flexion maximal s'obtient en amplifiant le moment dû aux seules charges verticales.

Si on suppose le chargement symétrique par rapport à la mi-portée, M est maximum dans la section à mi-portée et une très bonne approximation de sa valeur est obtenue avec la formule suivante :

$$M = M_0 \left[1 + \frac{\pi^2 u}{\psi (1 - u)} \right] \quad (8.12)$$

en posant :

$$u = \frac{N}{N_c} \quad \text{avec} \quad N_c = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}$$

et :

$$\psi = \frac{M_0 \ell^2}{EI f}$$

avec M_0 et f , respectivement moment de flexion et flèche dans la section à mi-portée, sous l'effet des charges verticales. (Le paragraphe 4.8 donne les expressions de M_0 et f .)

Cas de la charge concentrée :

$$\psi = + \frac{P\ell}{4} \cdot \frac{\ell^2}{EI} \cdot \frac{48EI}{P\ell^3} = 12$$

Cas de la charge uniforme :

$$\psi = + \frac{p\ell^2}{8} \cdot \frac{\ell^2}{EI} \cdot \frac{384EI}{5p\ell^4} = \frac{384}{40} = 9,6$$

Cas d'une console :

$$M = M_0 \left[1 + \frac{\pi^2 u}{4\psi (1 - u)} \right] \quad (8.13)$$

en posant : $u = \frac{N}{N_c}$ avec $N_c = \frac{\pi^2 EI}{4\ell^2}$

et : $\psi = \frac{M_0 \ell^2}{EI f}$

avec M_0 , moment de flexion à l'encastrement et f , la flèche à l'extrémité libre. (ℓ représente la portée de la console ; le paragraphe 4.7 donne les expressions M_0 et f .)

Cas de la charge concentrée à l'extrémité libre :

$$\psi = P\ell \cdot \frac{\ell^2}{EI} \cdot \frac{3EI}{P\ell^3} = 3$$

Cas de la charge uniformément répartie :

$$\psi = \frac{p\ell^2}{2} \cdot \frac{\ell^2}{EI} \cdot \frac{8EI}{p\ell^4} = 4$$

Cas d'un couple à l'extrémité libre :

$$\psi = C \cdot \frac{\ell^2}{EI} \cdot \frac{2EI}{C\ell^2} = 2$$

8.1.7 Poteau d'un portique

■ Cas 1 : Portique articulé en pieds

Valeur de la charge critique de flambement :

$$F_c = \left(\frac{\pi}{hn} \right)^2 EI_1$$

$$n = \frac{\pi}{A}$$

avec A solution de :

$$\cot A - \frac{A\ell I_1}{3hI_2} = 0$$

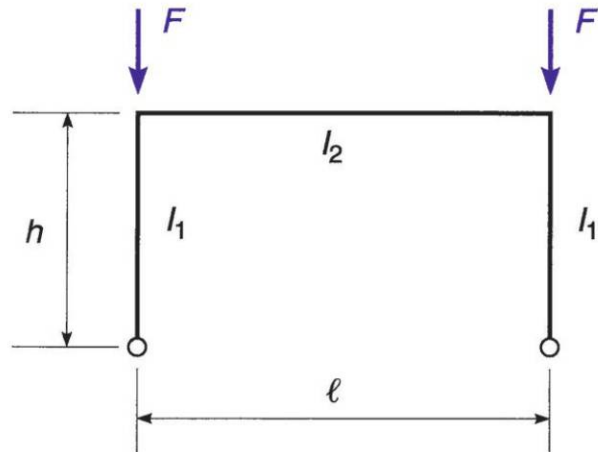


Figure 8.17

Longueur libre de flambement : $\ell_0 = nh$

Valeur approchée de n :

$$n = 2\sqrt{1 + 0,4 \frac{I_1 \ell}{I_2 h}}$$

■ Cas 2 : Portique encastré en pieds

Valeur de la charge critique de flambement :

$$F_c = \left(\frac{\pi}{hn} \right)^2 EI_1$$

$$n = \frac{\pi}{A}$$

avec A solution de :

$$\tan A + \frac{A\ell I_1}{6hI_2} = 0$$

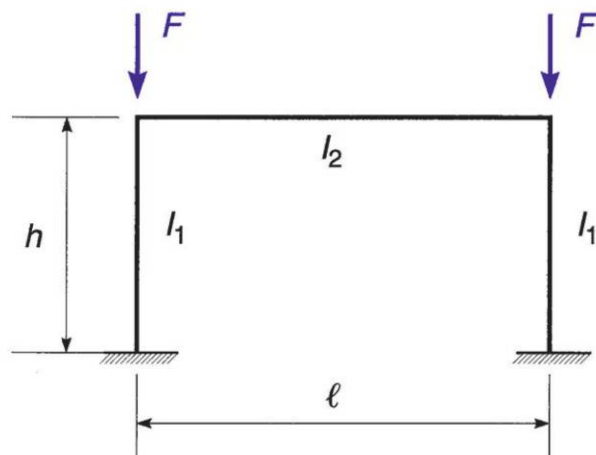


Figure 8.18

Longueur libre de flambement : $\ell_0 = nh$

Valeur approchée de n :

$$n = \sqrt{\frac{1 + \frac{8I_1\ell}{15I_2h}}{1 + \frac{2I_1\ell}{15I_2h}}}$$

8.1.8 Approche réglementaire du flambement selon l'Eurocode 3 (structures en acier)

À noter

La rédaction de l'Eurocode 3 est complexe et dense. Elle n'est par ailleurs pas entièrement finalisée. Parmi les deux méthodes du texte est présentée ci-après celle dite "réglementaire" qui peut être sujette à de légères modifications d'ici la validation définitive (qui aura le statut de norme européenne). Ce paragraphe a pour objet d'appréhender brièvement les différences entre méthodes théorique et normative (cette dernière prenant en compte l'expérimentation).

■ Flambement par flexion d'un élément sollicité en compression simple

La force critique de flambement F_c d'un élément soumis à la compression simple est égale à :

$$F_c = \frac{\chi\beta_s\Omega R_e}{\gamma_{M1}}$$

avec :

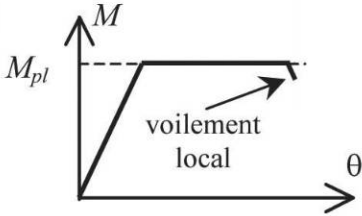
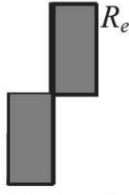
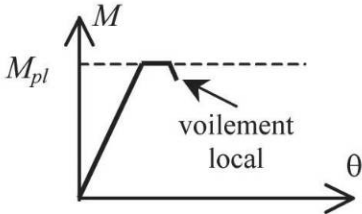
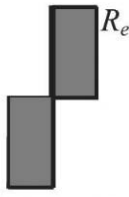
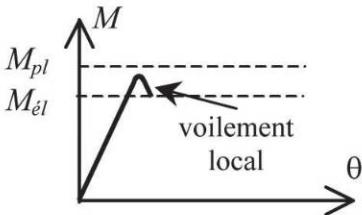
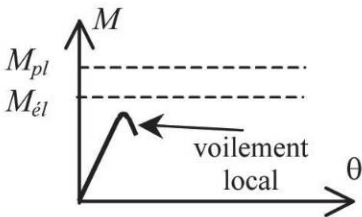
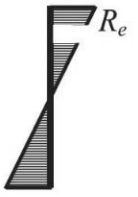
$$\beta_s = \begin{cases} 1 & \text{si la section est de classe 1, 2 ou 3} \\ \Omega_{eff}/\Omega & \text{si la section est de classe 4} \end{cases}$$

χ : coefficient de réduction pour le mode de flambement considéré ;

Ω : aire de la section ;

R_e : contrainte de limite élastique de l'acier ;

γ_{M1} : coefficient partiel de sécurité pris égal à 1,1 pour les phénomènes d'instabilité.

Classe	Modèle de comportement	Résistance de calcul (section concernée)	Capacité de rotation plastique de section
1		 Section Ω	Importante
2		 Section Ω	Modérée
3		 Section Ω	Absente
4		 section Ω_{eff}	Absente

8

- ▶ de classe 1, a lieu dans le domaine plastique après avoir admis des rotations de section importantes ;
- ▶ de classe 4, a lieu avant même que la contrainte de compression dans la fibre la plus sollicitée n'atteigne la contrainte de limite élastique R_e . Dans ce cas, on définit une section équivalente Ω_{eff} en ne conservant que les zones de résistance efficaces d'une section de classe 3.

Critère de flambement

On vérifie le risque d'instabilité par flambement lorsque l'élancement réduit est tel que :

$$\bar{\lambda} = \frac{l_0}{\pi \rho} \sqrt{\frac{\beta_s R_e}{E}} > 0,2$$

où ℓ_0 longueur libre de flambement dépend des conditions de liaisons aux extrémités, ρ est le rayon de giration de la section calculé avec le moment quadratique I minimal.

Calcul du coefficient de réduction χ

Le coefficient de réduction χ est défini par la relation suivante :

$$\chi = \frac{1}{\varphi + \left[\varphi^2 - \bar{\lambda}^2 \right]^{0,5}} \quad (\text{mais } \chi \leq 1)$$

où : $\varphi = 0,5 \left[1 + \alpha(\bar{\lambda} - 0,2) + \bar{\lambda}^2 \right]$ avec α un facteur d'imperfection dépendant des courbes expérimentales de flambement de la section de la figure 8.20.

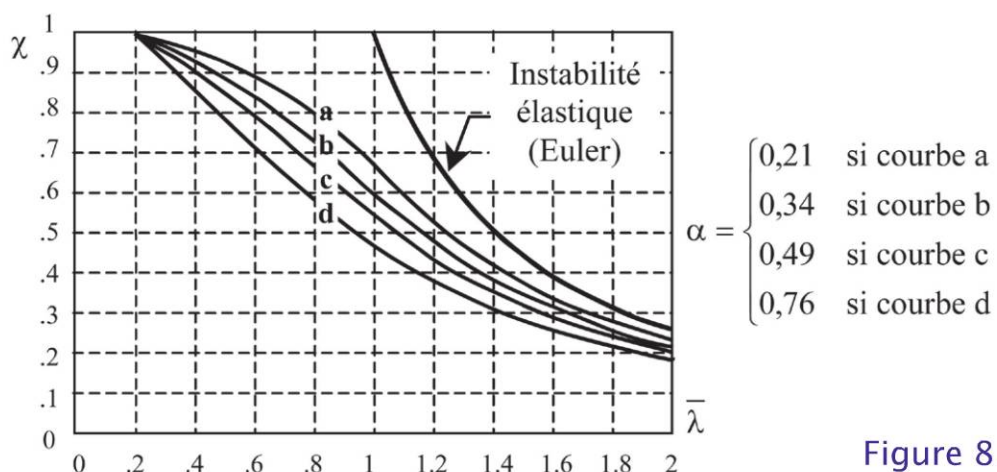


Figure 8.20

Pour une section et un axe de flambement donnés, la courbe de flambement appropriée est déterminée par le tableau de la figure 8.21.

Exemple d'application

Poteau IPE 140 (Fig. 8.22), longueur $\ell = 6$ m, bi-articulé à ses extrémités, de caractéristiques géométriques et mécaniques : $S = 16,43 \text{ cm}^2$; $h = 140 \text{ mm}$; $b = 73 \text{ mm}$; $t_f = 7 \text{ mm}$; $I_z = 44,92 \text{ cm}^4$; $R_e = 240 \text{ MPa}$; $E = 200\,000 \text{ MPa}$; section de classe 1.

$$\text{Rayon de giration : } \rho = \sqrt{\frac{I_z}{\Omega}} = \sqrt{\frac{44,92}{16,43}} = 1,65 \text{ cm}$$

Élancement réduit (avec $\ell_0 = \ell$) :

$$\bar{\lambda} = \frac{l_0}{\pi \rho} \sqrt{\frac{\beta_S R_e}{E}} = \frac{600}{\pi \cdot 1,65} \sqrt{\frac{1 \times 240}{200\,000}} = 4 > 0,2$$

Coefficient de réduction χ :

$$\varphi = 0,5 \left[1 + \alpha(\bar{\lambda} - 0,2) + \bar{\lambda}^2 \right] = 9,146$$

avec $\alpha = 0,34$ (courbe b selon fig. 8.21)

$$\text{d'où } \chi = \frac{1}{\varphi + \left[\varphi^2 - \bar{\lambda}^2 \right]^{0,5}} = 57,57 \times 10^{-3}$$

Force critique de flambement :

$$\begin{aligned} F_c &= \frac{\chi \beta_S \Omega R_e}{\gamma_{M1}} = \frac{57,57 \times 10^{-3} \times 1 \times (16,439 \times 10^2) \times 240}{1,1} \\ &= 20\,649 \text{ N} \end{aligned}$$

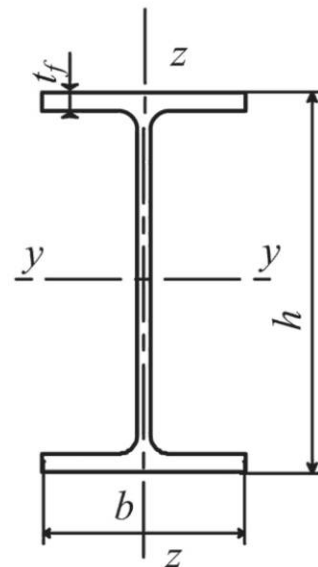
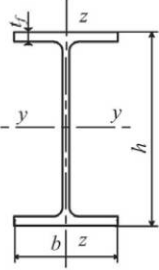
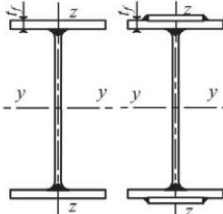
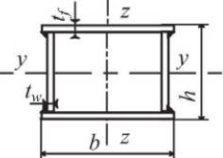
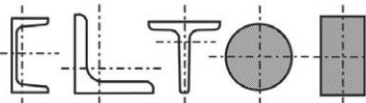


Figure 8.22

Type de section (Aciers type S235 à S420)	Limites	Axe de flambement	Courbe de flambement
Sections en I laminées 	$h / b > 1,2$	$y - y$	a
	$t_f \leq 40 \text{ mm}$	$z - z$	b
	$40 \text{ mm} < t_f \leq 100 \text{ mm}$	$y - y$	b
		$z - z$	c
	$h / b \leq 1,2$	$y - y$	b
	$t_f \leq 100 \text{ mm}$	$z - z$	c
Sections en I soudées 	$t_f \leq 40 \text{ mm}$	$y - y$	b
		$z - z$	c
	$t_f > 40 \text{ mm}$	$y - y$	c
		$z - z$	d
Sections creuses 	laminées à chaud	quel qu'il soit	a
	formées à froid (en utilisant R_{eb}^*)	quel qu'il soit	b
	formées à froid (en utilisant R_{ea}^*)	quel qu'il soit	b
Caissons soudés 	tous les cas sauf celui ci-dessous	quel qu'il soit	b
	soudures épaisses et $b / t_f < 30$	$y - y$	c
	$h / t_w < 30$	$z - z$	c
Sections en U, L, T et sections pleines 		quel qu'il soit	c

* R_{eb} : limite d'élasticité de l'acier de base ; R_{ea} : limite d'élasticité de l'acier écroui.

Figure 8.21

8.2 Déversement latéral des poutres

Définition

Le déversement latéral est un phénomène de flambement accompagné de torsion, pouvant intervenir, dans le cas d'une poutre étroite sans soutien latéral, pour une valeur critique des charges notablement inférieure à la valeur correspondant à la résistance à la flexion de la poutre soutenue latéralement.

Dans les formules qui suivent, on utilise les rigidités à l'égard de la flexion latérale et de la torsion :

$$B = EI_2 \quad C = GJ$$

(I_2 est calculé par rapport à l'axe vertical de la section droite).

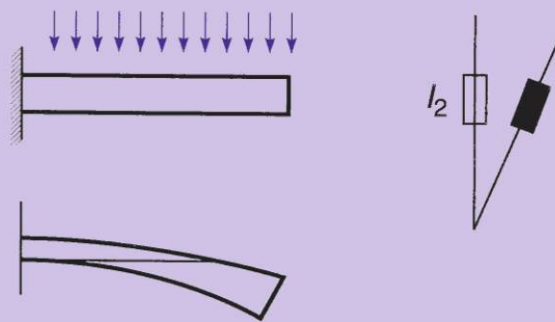


Figure 8.23

8.2.1 Console

La console a une portée ℓ et une section rectangulaire constante.

■ Cas 1 : console chargée à son extrémité

La charge critique est

$$P_c = \frac{4,01\sqrt{BC}}{\ell^2} \quad (8.14)$$

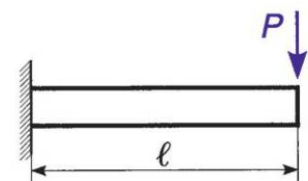


Figure 8.24

correspondant à un moment critique

$$M_c = \frac{4,01\sqrt{BC}}{\ell} \quad (8.15)$$

■ Cas 2 : console uniformément chargée

La densité de charge critique p_c a pour valeur :

$$p_c = \frac{12,85\sqrt{BC}}{\ell^3} \quad (8.16)$$

correspondant à un moment critique :

$$M_c = \frac{6,42\sqrt{BC}}{\ell} \quad (8.17)$$

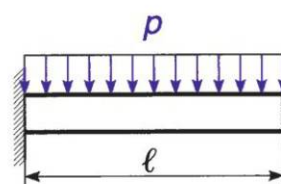


Figure 8.25

8.2.2 Poutre sur deux appuis simples

La poutre est de portée ℓ et de section rectangulaire constante. Les rotations des sections d'appui autour de l'axe longitudinal de la poutre, sont supposées empêchées.

■ Cas 1 : poutre chargée dans la section médiane

La charge critique est :

$$p_c = \frac{16,9\sqrt{BC}}{\ell^2} \quad (8.18)$$

correspondant à un moment critique :

$$M_c = \frac{4,23\sqrt{BC}}{\ell} \quad (8.19)$$

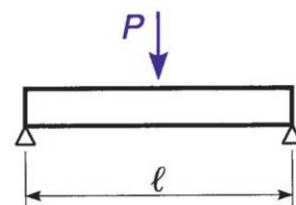


Figure 8.26

■ Cas 2 : poutre uniformément chargée

La densité de charge critique p_c a pour valeur :

$$p_c = \frac{28,3\sqrt{BC}}{\ell^3} \quad (8.20)$$

correspondant à un moment critique :

$$M_c = \frac{3,54\sqrt{BC}}{\ell} \quad (8.21)$$

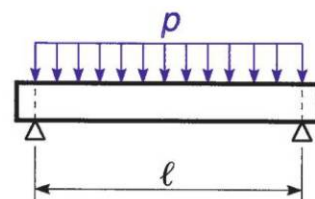


Figure 8.27

■ Cas 3 : deux moments égaux aux extrémités

$$M_c = \frac{\pi\sqrt{BC}}{\ell} \quad (8.22)$$

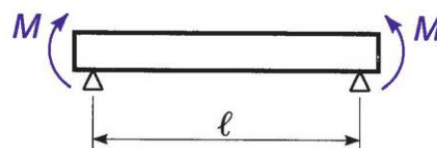


Figure 8.28

■ Cas 4 : un moment à une extrémité

$$M_c = \frac{5,56\sqrt{BC}}{\ell} \quad (8.23)$$

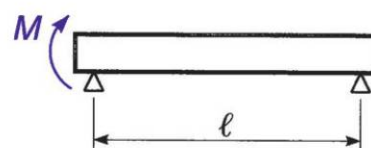


Figure 8.29

■ Cas 5 : flexion et compression par deux forces F excentrées

$$(M = Fe)$$

$$M_c = \frac{\pi\sqrt{BC}}{\ell\sqrt{1 + \frac{\ell}{\pi e}\sqrt{\frac{C}{B}}}} \quad (8.24)$$

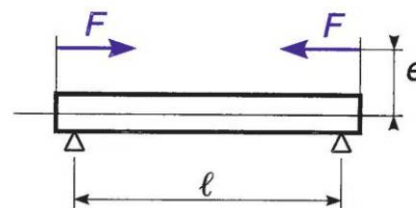


Figure 8.30

Remarque

Pour une poutre à section en I à ailes égales, les valeurs précédentes sont à multiplier par un coefficient dont la valeur est voisine de :

$$\sqrt{1 + \frac{10}{a^2}} \quad \text{avec} \quad a^2 = \frac{4C\ell^2}{Bh^2}$$

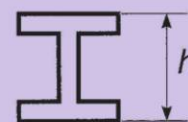


Figure 8.31

ℓ est la portée de la poutre, h la hauteur de la section.

Si la poutre a des ailes inégales, de moments quadratiques I'_2 et I''_2 par rapport à l'axe vertical de la section, on prendra :

$$B = EI_2 \quad \text{avec} \quad I_2 = \frac{2I'_2I''_2}{I'_2 + I''_2}$$

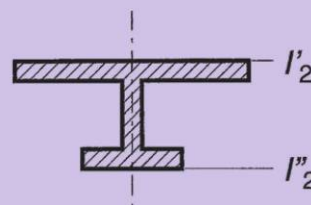


Figure 8.32

8.3 Flambement des arcs et anneaux

8.3.1 Arc de moment quadratique réduit uniforme

Sa fibre moyenne est funiculaire du système de charges appliqué.

■ Cas 1 : arc articulé aux naissances

La poussée critique a pour valeur :

$$Q_c = \frac{4\pi^2 EI}{\ell^2} \quad (8.25)$$

I est le moment quadratique réduit de la section de l'arc.

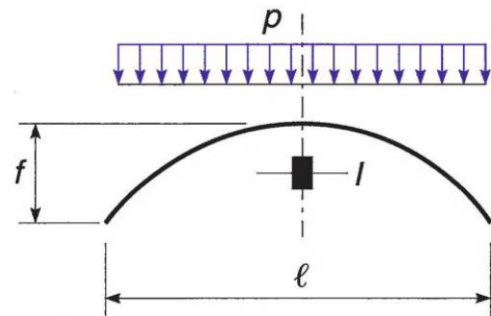


Figure 8.33

■ Cas 2 : arc encastré aux naissances

$$Q_c = 8,18 \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} \quad (8.26)$$

8.3.2 Arc circulaire

L'arc est de section uniforme, soumis à une charge radiale uniformément répartie p .

■ Cas 1 : arc articulé à ses extrémités

Le flambement a lieu suivant la ligne en pointillé :

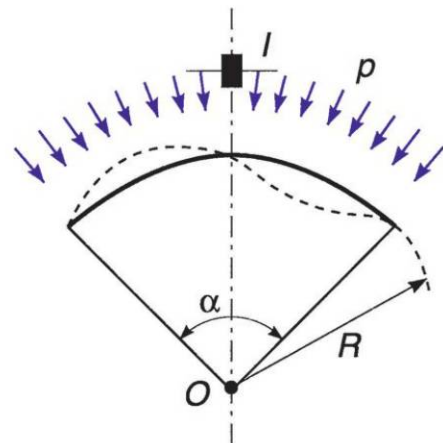


Figure 8.34

$$P_c = \left(\frac{4\pi^2}{\alpha^2} - 1 \right) \frac{EI}{R^3} \quad (8.27)$$

■ Cas 2 : arc encastré à ses extrémités

$$P_c = (k^2 - 1) \frac{EI}{R^3} \quad (8.28)$$

Tableau 8.2

α	60°	120°	180°	240°	300°	360°
k	8,62	4,37	3	2,36	2,07	2

8.3.3 Anneau circulaire

L'anneau, de section uniforme, est soumis à une charge radiale extérieure uniforme :

$$P_c = \frac{3EI}{R^3} \quad (8.29)$$

correspondant à un effort normal dans la section de l'anneau :

$$N_c = \frac{3EI}{R^2} \quad (8.30)$$

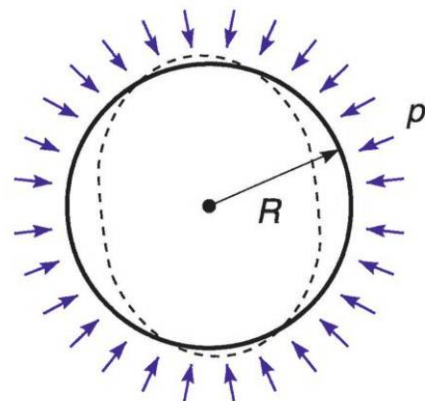


Figure 8.35

8.3.4 Tube à section circulaire

Le tube d'épaisseur constante est soumis à une pression extérieure uniforme.

Pression critique :

$$P_c = \frac{E}{4(1 - \nu^2)} \left(\frac{h}{R} \right)^3 \quad (8.31)$$

h est l'épaisseur du tube.

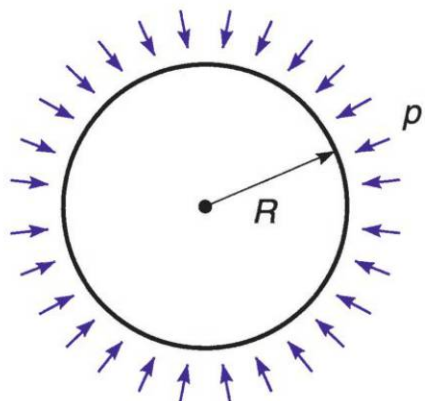


Figure 8.36

8.4 Voilement d'une plaque rectangulaire

Définition

On considère une plaque d'épaisseur h simplement appuyée sur deux bords opposés et soumise sur ces bords à un effort normal de compression N par unité de longueur ; les deux autres bords présentent des conditions d'appui diverses

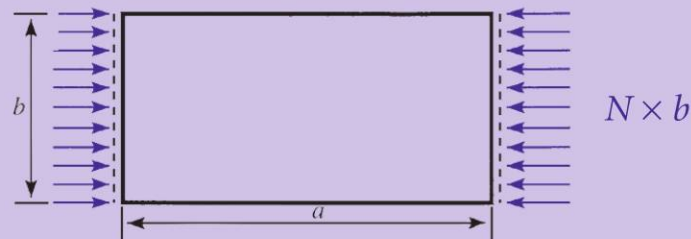


Figure 8.37

Valeur critique de N :

$$N_c = \alpha \frac{\pi^2 D}{a^2} \quad (8.32)$$

avec :

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (\text{cf. formule 6.1})$$

α coefficient dépendant des conditions d'appui.

■ Cas 1 : les côtés de longueur a sont libres

$$\alpha = 1$$

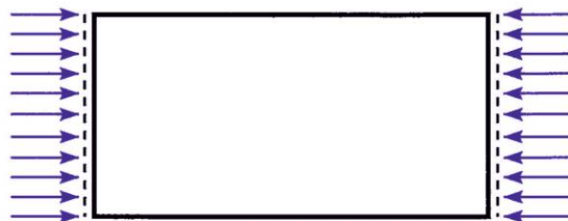


Figure 8.38

■ Cas 2 : les côtés de longueur a sont simplement appuyés

$$\text{si } \frac{a}{b} < 1 \quad \alpha = \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2$$

$$\text{si } \frac{a}{b} > 1 \quad \alpha = 4 \frac{a^2}{b^2}$$

(selon Bryan)



Figure 8.39

■ Cas 3 : les côtés de longueur a sont, l'un simplement appuyé, l'autre libre

$$\alpha = 1 + 0,46 \frac{a^2}{b^2}$$

(selon Timoshenko)

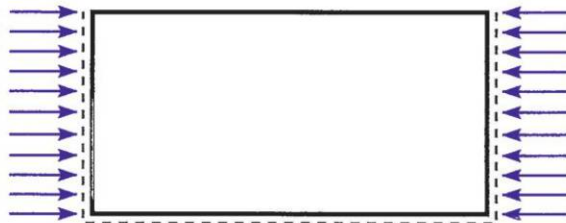


Figure 8.40

8.5 Cloquage des voiles minces

8.5.1 Voile cylindrique

Le voile subit des contraintes de compression suivant les génératrices.

Si le rapport $\frac{R}{h}$ ne dépasse pas 50 à 60, le calcul théorique de la contrainte de compression fournit la valeur suivante :

$$\sigma_c = 0,6E \frac{h}{R} \quad (8.33)$$

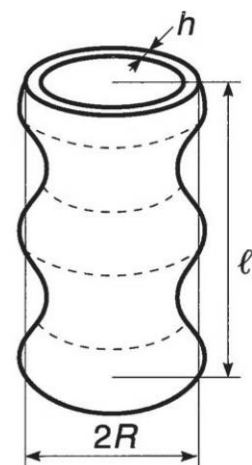


Figure 8.41

h et l'épaisseur du voile, R le rayon du cylindre.

Si le rapport $\frac{R}{h}$ dépasse la valeur ci-dessus, et lorsque le cylindre est raidi par des tympans dont l'écartement est supérieur au rayon du cylindre, les essais ont montré que la valeur de la contrainte critique est voisine de :

$$\sigma_c = 0,18E \frac{h}{R} \quad (8.34)$$

(cas de la figure 8.37).

Ces valeurs de contrainte critique de compression sont plus faibles que la contrainte critique déduite de la formule d'Euler, lorsque le cylindre est court.

Par contre, si le cylindre est long (cas des tubes d'échafaudage) c'est la contrainte critique d'Euler qui est la plus faible, et qui est donc déterminante.

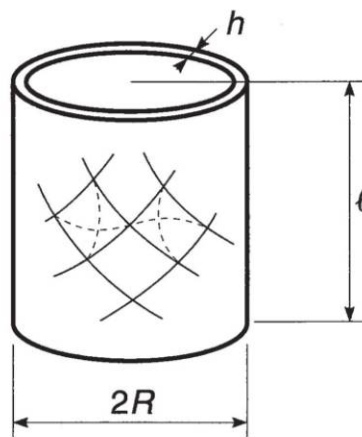


Figure 8.42

8.5.2 Voile sphérique

Le voile a une épaisseur h et un rayon R . La contrainte critique de compression a la même valeur que la contrainte correspondant à un cylindre de même épaisseur et de même rayon (formule 8.33).

Il est toutefois prudent d'utiliser la formule (8.34) qui tient compte de légères imperfections de forme.

9

Plasticité

Définition

La résistance des matériaux classique, fondée sur l'hypothèse de l'élasticité, ne considère que des corps naturels idéalisés : les corps élastiques.

Mais la déformation réelle du corps naturel est différente, en général, de la déformation élastique ; on peut définir la déformation réelle totale comme étant la somme d'une déformation élastique et d'une déformation complémentaire : la déformation plastique.

Après décharge, le corps peut être soumis à des contraintes dites résiduelles non nulles, même en l'absence de forces extérieures : il est en état d'auto-contrainte ; cet état résulte d'une déformation imposée (déformation plastique, dilatation, retrait).

9.1 Lois de la déformation plastique

Examinons les relations existant entre l'état de contrainte défini par la seule variable mécanique Q et l'état de déformation défini par la seule variable géométrique q .

On distingue :

1) Le corps élastoplastique écrouissable

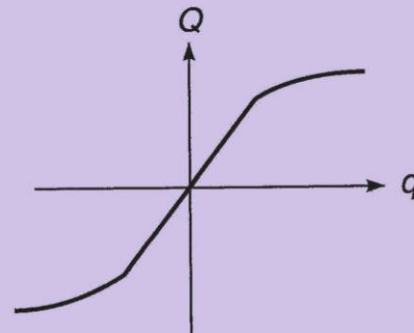


Figure 9.1

2) Le corps élastoplastique parfait

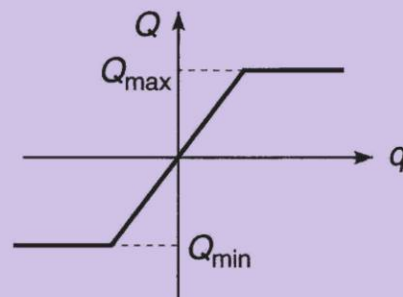


Figure 9.2

3) Le corps plastique parfait ou rigide plastique

Dans ce cas, la déformation plastique est confondue avec la déformation totale.

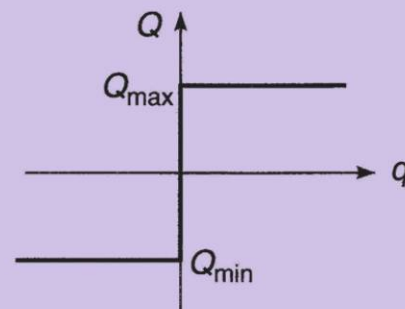


Figure 9.3

9.2 États d'équilibre limite

Pour calculer les charges limites que peut supporter une structure, on néglige les déformations élastiques et on considère le corps plastique parfait ; cette hypothèse est valable à condition de vérifier qu'au moment de la ruine, les déformations de la structure élastoplastique demeurent petites.

Dans la **méthode cinématique** de calcul des charges limites, la structure est transformée en mécanisme, correspondant à la formation de rotules plastiques dans le cas d'un système de poutres, et à l'écoulement plastique de certaines barres dans le cas d'un système réticulé.

Pour un mécanisme de déplacement donné de la structure, désignons par W_e le travail des forces extérieures et par W_i le travail des forces intérieures, causées par la déformation plastique ; le coefficient de sécurité est :

$$\gamma' = \frac{W_i}{W_e}$$

Si l'on considère donc l'ensemble des nombres γ' qui correspondent à tous les mécanismes de déplacement possibles de la structure, le coefficient de sécurité effectif γ est le plus petit nombre de cet ensemble.

Dans la pratique, on utilise, pour les systèmes complexes, la méthode de superposition des mécanismes.

Exemple : Portique articulé

Supposons la section des barres constante et soit $\pm M_0$ les valeurs limites des moments de flexion.

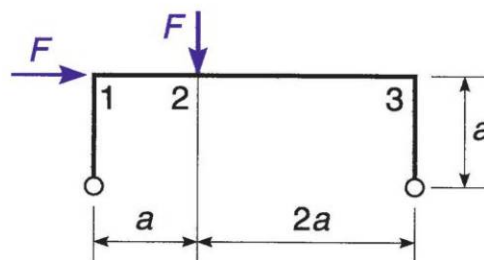


Figure 9.4

a) Sections 1 et 2 plastifiées (premier mécanisme)

$$W_e = 2Fa \theta - Fa \theta = Fa \theta$$

$$W_i = 6\theta M_0$$

$$\gamma'_1 = \frac{6M_0}{Fa}$$

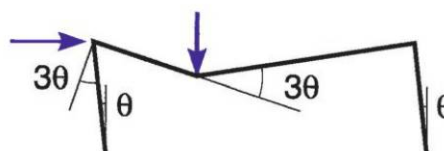


Figure 9.5

b) Sections 1 et 3 plastifiées (deuxième mécanisme)

$$W_e = Fa \theta$$

$$W_i = 2\theta M_0$$

$$\gamma'_2 = \frac{2M_0}{Fa}$$

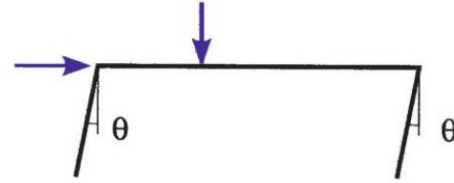


Figure 9.6

c) Sections 2 et 3 plastifiées (troisième mécanisme)

$$W_e = 2Fa \theta + 2Fa \theta = 4Fa \theta$$

$$W_i = 6\theta M_0$$

$$\gamma'_3 = \frac{3M_0}{2Fa}$$

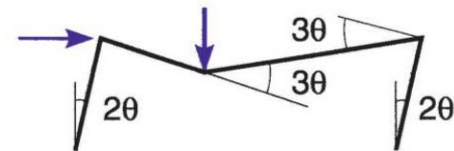


Figure 9.7

$$\gamma = \text{Min}(\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3) = \gamma'_3$$

Ainsi, c'est le troisième schéma (figure 9.7) qui représente le mécanisme de ruine réel.

Diagramme des moments en phase plastique

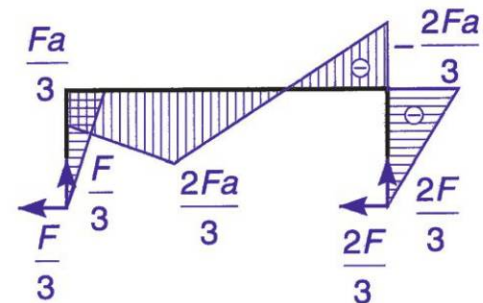


Figure 9.8

$$M_0 = \frac{2}{3}Fa$$

9.3 Théorème fondamental d'adaptation

Considérons un corps soumis à l'action d'un système de forces extérieures variables (F_i).

Si le comportement du corps était infiniment élastique, à un moment donné le système (F_i) donnerait lieu à un état de contrainte Q' .

Si l'on peut trouver un état d'auto-contrainte d'adaptation Q_a tel qu'en tout point du corps la superposition des deux états Q' et Q_a reproduira un état élastique, la stabilité sera assurée ; les contraintes résiduelles, résultat de la décharge élastique, tendent vers les contraintes d'adaptation.

Dans le cas général d'une poutre continue soumise à des charges fixes et à des surcharges variables, le comportement est élastique si en toute section on peut vérifier :

$$M'_\ell(x) \leq M(x) \leq M_\ell(x)$$

$M'_\ell(x)$ et $M_\ell(x)$ représentent respectivement le moment limite négatif et le moment limite positif.

Si cette inégalité n'est pas satisfaite, la poutre sera cependant stable si l'on peut trouver un moment d'adaptation $M_a(x)$ (compté positif) tel que :

$$M'_\ell(x) \leq M(x) + M_a(x) \leq M_\ell(x) \quad (9.1)$$

Exemple : Poutre continue à deux travées égales d'inertie constante

Supposons :

$$-M'_\ell(x) = M_\ell(x) = M_\ell$$

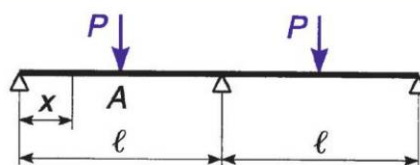


Figure 9.9

Le calcul élastique conduit à la courbe, en trait plein, des moments de la figure 9.10.

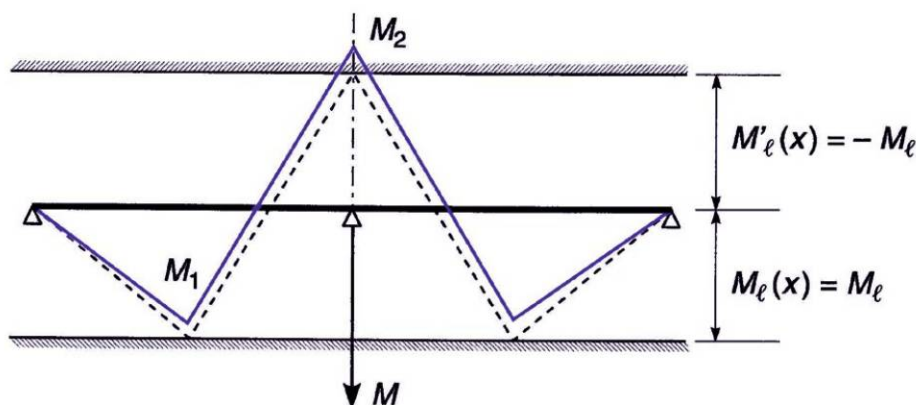


Figure 9.10

On constate sur appui : $M_2 < M'_\ell$ (moments négatifs). Il est envisagé un moment d'adaptation M_a tel que :

$$M_a = M'_\ell - M_2$$

Soit, après adaptation,

– sur appui $M'_2 = M_2 + M_a = M'_\ell = -M_\ell$

– en travée $M'_1 = M_1 + \frac{1}{2}M_a$

(moments d'adaptation en travée $M_a/2$).

La nouvelle courbe des moments est tracée en pointillés sur la figure 9.10.

On constate :

$$-M_\ell \leq M(x) + M_a(x) \leq M_\ell \quad \forall x$$

La poutre est stable.

9.4 Application de la théorie de la plasticité aux plaques

9.4.1 Principe

La théorie de la plasticité présentée dans les paragraphes précédents peut être étendue aux plaques. Ci-après est donnée la valeur du moment m par unité de longueur, pour divers cas de contours et de charges. La plaque est supposée isotrope (elle présente le même moment plastique quelles que soient la direction et la face de la plaque).

9.4.2 Plaque circulaire simplement appuyée sur son contour

■ **Cas 1 : Charge P répartie à l'intérieur d'un cercle concentrique**

$$m = \frac{P}{2\pi} \left(1 - \frac{2r}{3R} \right)$$

Si la charge P est concentrée au centre :

$$r = 0 \quad m = \frac{P}{2\pi}$$

Si la charge P est répartie sur toute la plaque :

$$r = R \quad m = \frac{P}{6\pi}$$

■ **Cas 2 : Charge linéaire q par unité de longueur sur une circonférence intérieure de rayon b**

$$m = qb \left(1 - \frac{b}{R} \right)$$

■ **Cas 3 : Charge concentrée P disposée à la distance a du centre**

$$m = \frac{P}{2\pi R} \sqrt{R^2 - a^2}$$

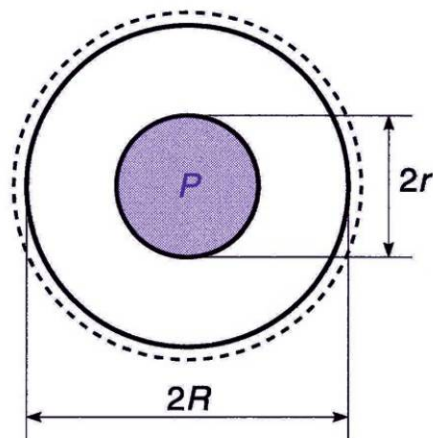


Figure 9.11

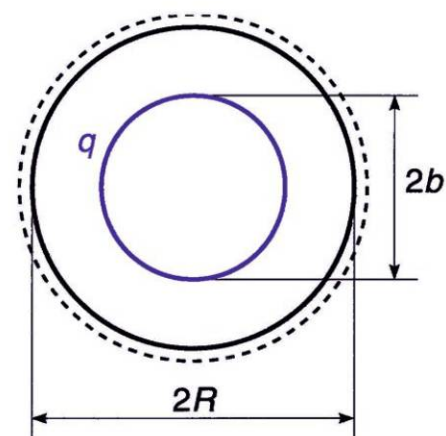


Figure 9.12

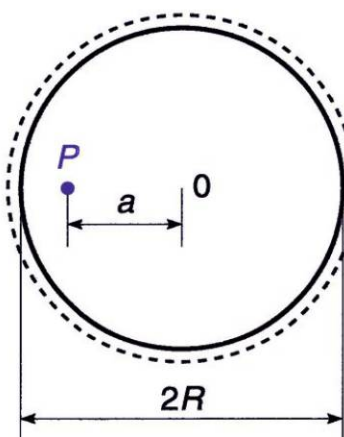


Figure 9.13

- **Cas 4 : Plaque simplement appuyée sur une partie de son contour, soumise à une charge concentrée P au centre**

$$m = \frac{P}{2\left(\pi - \frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right)}$$

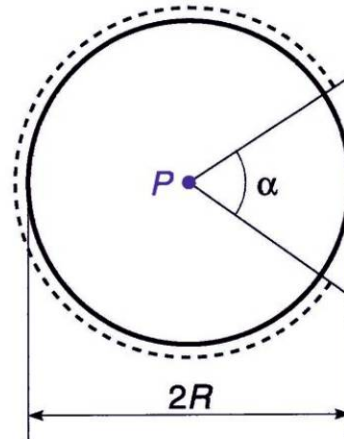


Figure 9.14

9.4.3 Plaque circulaire encastrée sur son contour

- **Cas 1 : Charge P répartie à l'intérieur d'un cercle concentrique de rayon r**

$$m = \frac{P}{4\pi} \left(1 - \frac{2r}{3R}\right)$$

Si la charge P est concentrée au centre :

$$r = 0 \quad m = \frac{P}{4\pi}$$

Si la charge P est répartie sur toute la plaque :

$$r = R \quad m = \frac{P}{12\pi}$$

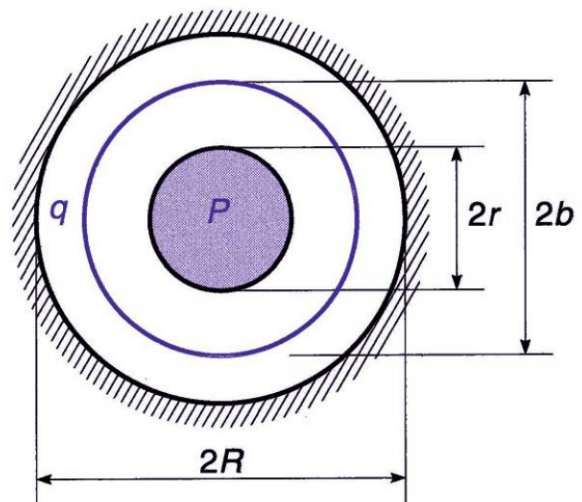


Figure 9.15

- **Cas 2 : Charge linéaire q par unité de longueur sur une circonférence intérieure de rayon b**

$$m = \frac{qb}{2} \left(1 - \frac{b}{R} \right)$$

9.4.4 Plaque circulaire sur quatre appuis

- **Cas 1 : Charge P concentrée au centre**

$$m = \frac{P}{5,66}$$

- **Cas 2 : Charge P uniformément répartie**

$$m = \frac{P}{14,1}$$

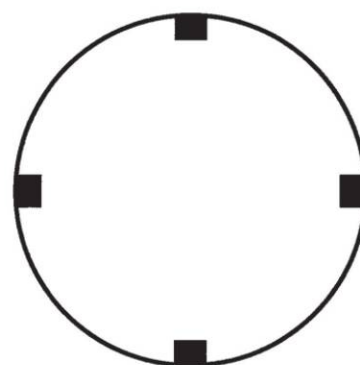


Figure 9.16

9.4.5 Plaque circulaire, avec appui ponctuel au centre, supportant une charge P uniformément répartie

- **Cas 1 : Plaque simplement appuyée sur son contour**

$$m = \frac{P}{45}$$

- **Cas 2 : Plaque encastree sur son contour**

$$m = \frac{P}{67}$$

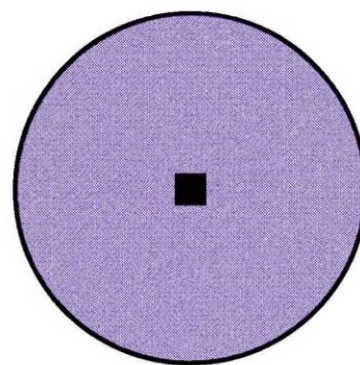


Figure 9.17

9.4.6 Plaque annulaire

Elle est limitée par deux circonférences de rayons R_1 et R_2 , supportant une charge uniformément répartie p et une charge linéaire q par unité de longueur sur le bord libre.

- **Cas 1 : Plaque simplement appuyée sur son contour extérieur, libre sur son contour intérieur**

$$m = \frac{p(R_2 - R_1)(R_2 + 2R_1)}{6} + qR_1$$

- **Cas 2 : Plaque encastée sur son contour extérieur, libre sur son contour intérieur**

$$m = \frac{p}{6}(R_2 - R_1)^2 \frac{R_2 + 2R_1}{2R_2 - R_1} + qR_1 \frac{R_2 - R_1}{2R_2 - R_1}$$

- **Cas 3 : Plaque libre sur son contour extérieur, simplement appuyée sur son contour intérieur**

$$m = \frac{p(R_2 - R_1)(2R_2 + R_1)}{6} + qR_2$$

- **Cas 4 : Plaque libre sur son contour extérieur, encastée sur son contour intérieur**

$$m = \frac{p}{6}(R_2 - R_1)^2 \left(2 + \frac{R_1}{R_2} \right) + q(R_2 - R_1)$$

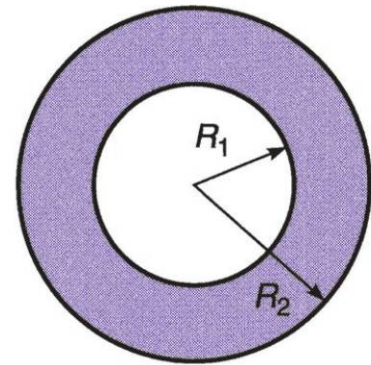


Figure 9.18

9.4.7 Plaque circulaire rigide, sur sol déformable

Charge P répartie à l'intérieur d'un cercle concentrique de rayon r .

$$m = \frac{P}{3\pi} \left(1 - \frac{r}{R} \right)$$

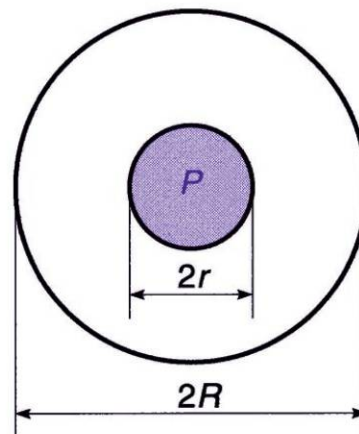


Figure 9.19

9.4.8 Plaque carrée avec une charge P répartie sur un carré concentrique

- **Cas 1 : Plaque simplement appuyée sur son contour**

$$m = \frac{P}{8} \left(1 - \frac{2c}{3a} \right)$$

- **Cas 2 : Plaque encastrée sur son contour**

$$m = \frac{P}{16} \left(1 - \frac{2c}{3a} \right)$$

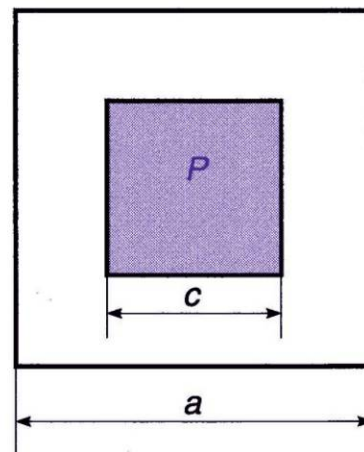


Figure 9.20

9.4.9 Plaque carrée avec conditions d'appui diverses, supportant une charge P uniformément répartie

■ Cas 1

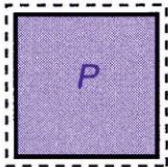


Figure 9.21

$$m = \frac{P}{24}$$

■ Cas 2

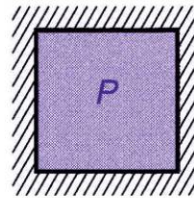


Figure 9.22

$$m = \frac{P}{48}$$

■ Cas 3

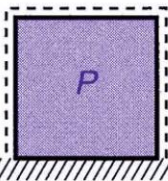


Figure 9.23

$$m = \frac{P}{29,3}$$

■ Cas 4

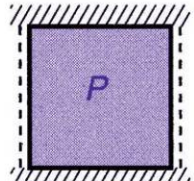


Figure 9.24

$$m = \frac{P}{35}$$

■ Cas 5

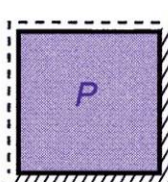


Figure 9.25

$$m = \frac{P}{35}$$

■ Cas 6

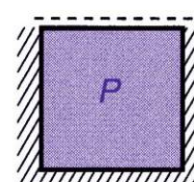


Figure 9.26

$$m = \frac{P}{41,1}$$

■ Cas 7

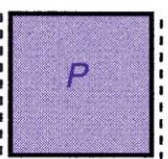


Figure 9.27

$$m = \frac{P}{14,2}$$

■ Cas 8

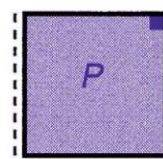


Figure 9.28

$$m = \frac{P}{10,6}$$

■ Cas 9

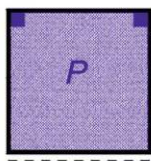


Figure 9.29

$$m = \frac{P}{8,55}$$

■ Cas 10

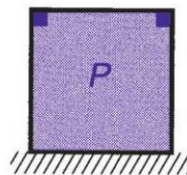


Figure 9.30

$$m = \frac{P}{11,2}$$

■ Cas 11



Figure 9.31

$$m = \frac{P}{8}$$

■ Cas 12

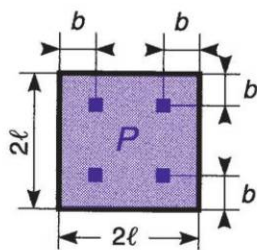


Figure 9.32

On pose : $m = \frac{P}{4\ell^2}$

$$m = \max \left[\frac{p\ell(\ell - 2b)}{2} ; \frac{pb^2}{2} \right]$$

9.4.10 Plaque carrée rigide sur sol déformable

Charge P répartie sur un carré concentrique

$$m = \frac{P}{8} \left(1 - \frac{c}{a} \right)$$

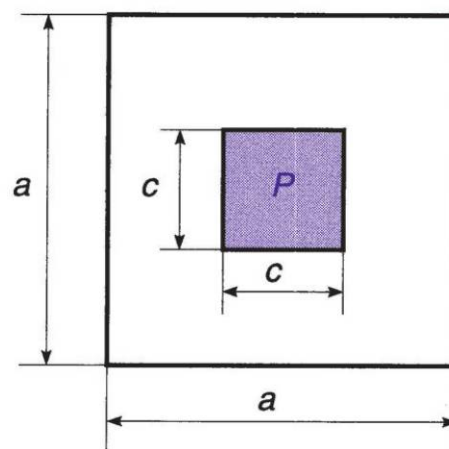


Figure 9.33

9.4.11 Plaque rectangulaire avec conditions d'appui diverses, supportant une charge P uniformément répartie

■ Cas 1 : Plaque simplement appuyée sur son contour

$$m = \frac{P}{8 \left(1 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)}$$

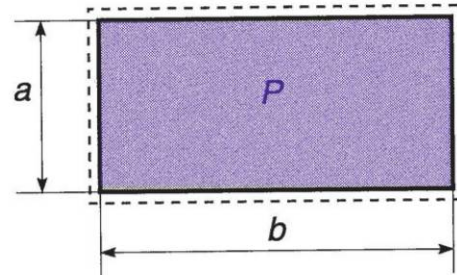


Figure 9.34

■ Cas 2 : Plaque encastée sur son contour

$$m = \frac{P}{16 \left(1 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)}$$

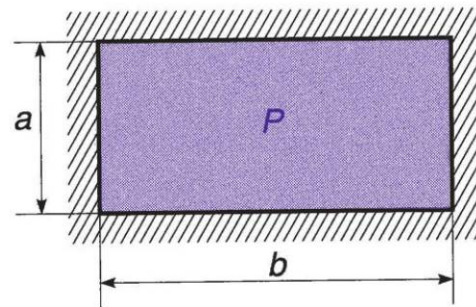


Figure 9.35

■ Cas 3 : Plaque simplement appuyée sur trois côtés, libre sur le quatrième

Posons $\alpha = \frac{b}{a} < 1,5$

$$m = \frac{P\alpha}{96} \left(\sqrt{\alpha^2 + 12} - \alpha \right)^2$$

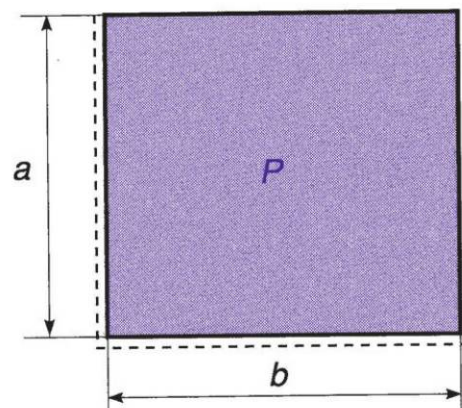


Figure 9.36

■ **Cas 4 : Plaque encastree sur trois cotes, libre sur le quatrieme**

Posons $\alpha = \frac{b}{a} < 1,5$

$$m = \frac{P\alpha}{192} \left(\sqrt{\alpha^2 + 12} - \alpha \right)^2$$

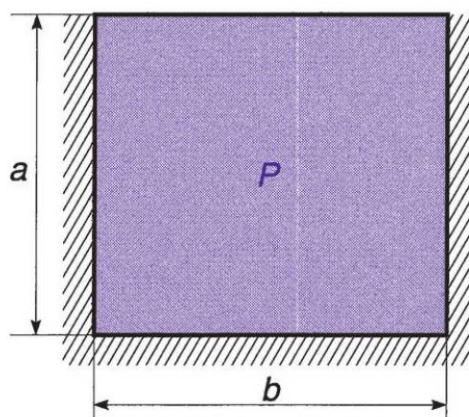


Figure 9.37

9.4.12 **Plaque rectangulaire avec conditions d'appui diverses, supportant une charge P concentree**

■ **Cas 1 : Plaque simplement appuyee sur son contour**

$$m = \frac{P}{4 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)}$$

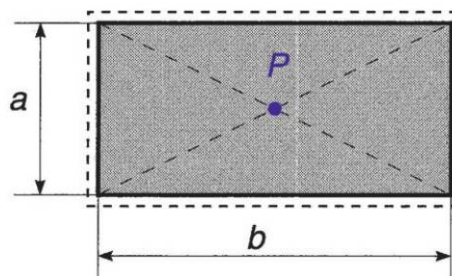


Figure 9.38

■ **Cas 2 : Plaque encastree sur son contour**

$$m = \frac{P}{8 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)}$$

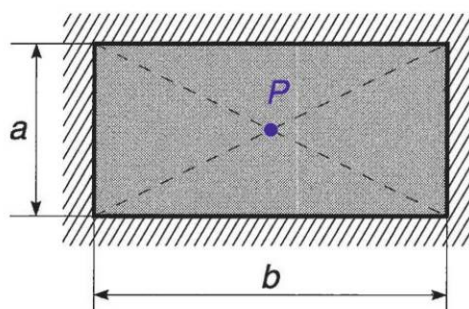


Figure 9.39

■ **Cas 3 : Plaque simplement appuyée sur trois côtés, libre sur le quatrième**

$$m = \frac{P}{\frac{a}{d_1} + \frac{a}{d_3} + \frac{b}{d_2}}$$

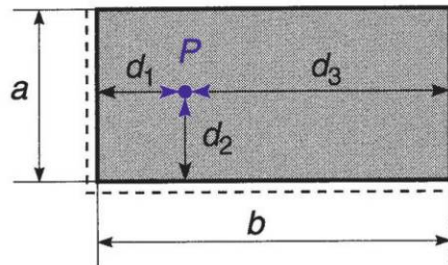


Figure 9.40

■ **Cas 4 : Plaque encastree sur trois côtés, libre sur le quatrième**

$$m = \frac{P}{2 \left(\frac{a}{d_1} + \frac{a}{d_3} + \frac{b}{d_2} \right)}$$

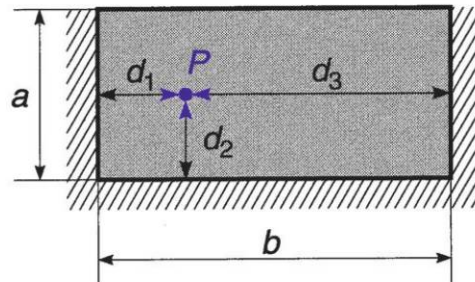


Figure 9.41

9.4.13 **Plaque triangulaire appuyée sur les trois côtés, supportant une charge P uniformément répartie**

■ **Cas 1 : Plaque simplement appuyée sur son contour**

$$m = \frac{P \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}{3 (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)^2}$$

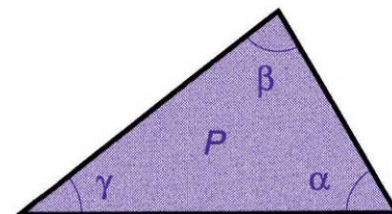


Figure 9.42

Cas particulier du triangle équilatéral : $m = \frac{P}{31,2}$

■ Cas 2 : Plaque encastrée sur son contour

$$m = \frac{P \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}{6 (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)^2}$$

Cas particulier du triangle équilatéral : $m = \frac{P}{62,4}$

9.4.14 Plaque triangulaire appuyée sur deux côtés, supportant une charge P uniformément répartie

■ Cas 1 : Plaque simplement appuyée

$$m = \frac{P}{6} \tan \frac{\gamma}{2}$$

Cas particulier de l'angle d'appui droit : $m = \frac{P}{6}$

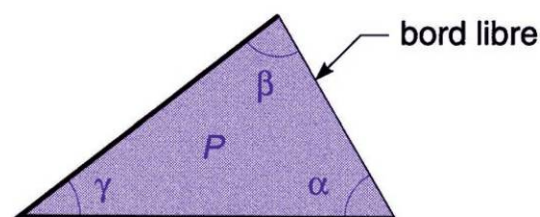


Figure 9.43

■ Cas 2 : Plaque encastrée

$$m = \frac{2P}{6 \left(4 + (\cot \alpha + \cot \beta) \tan \frac{\gamma}{2} \right)} \tan \frac{\gamma}{2}$$

Cas particulier de l'angle d'appui droit : $m = \frac{P}{18}$

9.4.15 Plaque triangulaire équilatérale appuyée en trois points, supportant une charge P uniformément répartie

■ Cas 1 : $h < 8c$

$$m = \max \left[\frac{P}{\sqrt{3}} \left(\frac{7}{18} - \frac{c}{h} \right); \frac{pc^2}{6} \right]$$

■ Cas 2 : $h > 8c$

$$m = \max \left[\frac{P}{2\sqrt{3}} \left(1 - 3 \left(\frac{c}{2h} \right)^{2/3} \right); \frac{pc^2}{6} \right]$$

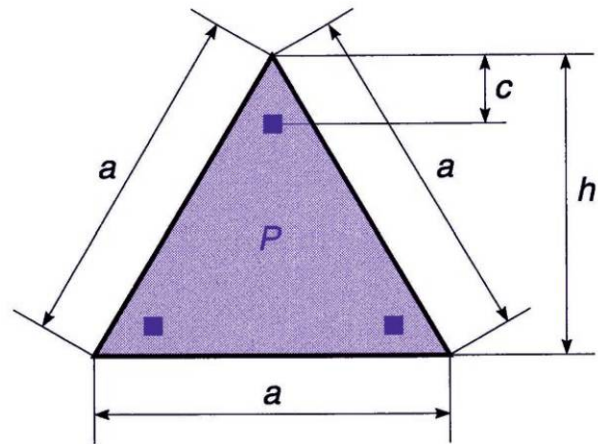


Figure 9.44

9.4.16 Plaque en forme de quadrilatère convexe quelconque, supportant une charge uniformément répartie d'intensité P

Le point O représente l'intersection des bissectrices des deux angles formés respectivement par deux côtés opposés.

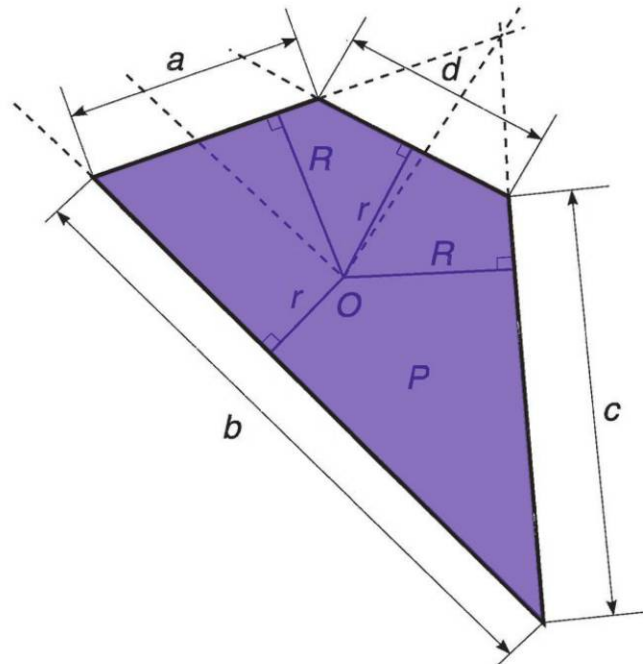


Figure 9.45

■ Cas 1 : Plaque simplement appuyée sur son contour

$$m = \frac{PRr}{2\left(1 + \frac{r}{R} + \frac{R}{r}\right)}$$

■ Cas 2 : Plaque encastrée sur son contour

$$m = \frac{PRr}{4\left(1 + \frac{r}{R} + \frac{R}{r}\right)}$$

10

Dynamique

Définition

Dans tous les chapitres précédents, les effets des chargements ont été considérés sans prendre en compte le paramètre temps. Le calcul dynamique a pour objet de faire intervenir ce paramètre temps, noté t .

Sous l'effet d'une action variable avec le temps, les sollicitations et par conséquent les déformations seront des fonctions du temps.

Une masse peut subir au maximum six composantes indépendantes de déplacement dans un repère de référence donné (on dit qu'elle a au maximum six degrés de liberté) : trois translations et trois rotations.

On appelle **oscillateur simple**, une masse reliée à un support par un ressort et ne pouvant se déplacer que dans une seule direction (un degré de liberté).

L'étude de l'oscillateur simple est essentielle car le calcul d'une structure élastique comportant plusieurs masses se ramène à celui d'un certain nombre d'oscillateurs simples. L'ensemble de ces oscillateurs simples constitue un **oscillateur multiple**.

10.1 Oscillateur simple avec translation

Formules fondamentales

On considère une masse m , reliée à un support fixe par l'intermédiaire d'un ensemble ressort-amortisseur caractérisé par :

- sa **raideur** k (la force de rappel F_r est proportionnelle à la translation u : $F_r = ku$) ;
- son **coefficient d'amortissement** c (la force de rappel F_a est proportionnelle à la vitesse $v = du / dt$: $F_a = c \cdot du / dt$).

La masse est soumise à l'action d'une force $p(t)$ variable avec le temps, qui provoque un déplacement $u(t)$.

L'écriture de l'équilibre des forces, à un instant t , conduit à l'équation fondamentale du mouvement :

$$\frac{d^2 u}{dt^2}(t) + 2\omega\xi \frac{du}{dt}(t) + \omega^2 u(t) = \frac{p(t)}{m} \quad (10.1)$$

en posant : $\omega^2 = \frac{k}{m}$ (ω est la *pulsation*)

et : $\xi = \frac{c}{2m\omega}$ (ξ est l'*amortissement*)

Pour les matériaux habituellement utilisés, ξ est inférieur à 0,1 et peut être de l'ordre de 0,05 pour les matériaux courants (béton, métal).

La solution de l'équation (10.1) est fournie par l'**intégrale de Duhamel** :

$$u(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t p(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin[\omega(t-\tau)] d\tau \quad (10.2)$$

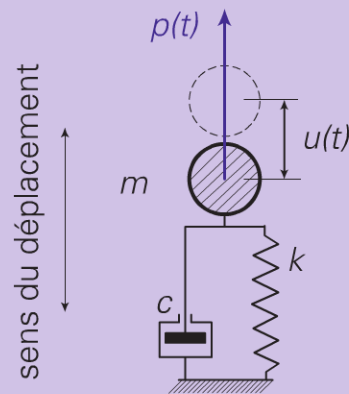


Figure 10.1

La sollicitation du ressort peut être calculée de deux façons, bien sûr équivalentes :

– soit en considérant la force de rappel :

$$F(t) = ku(t) \quad (10.3)$$

– soit en considérant la masse m soumise à une pseudo-accélération :

$$\gamma(t) = \omega^2 u(t)$$

d'où :

$$F(t) = m\gamma(t) \quad (10.4)$$

10.1.1 Cas d'un oscillateur libre

Cette situation est obtenue lorsque après avoir écarté la masse d'une distance u_0 de sa position d'équilibre, on la relâche au temps $t = 0$, avec à cet instant une vitesse v_0 et une force $p(t) = 0$.

La solution de l'équation (10.1) est :

$$u(t) = \left(\frac{v_0 + \xi \omega u_0}{\omega} \sin \omega t + u_0 \cos \omega t \right) e^{-\xi \omega t} \quad (10.5)$$

La figure 10.2 représente le mouvement qui est dit pseudo-périodique avec une période de :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (10.6)$$

On appelle *fréquence* (mesurée en hertz) : $f = \frac{1}{T}$

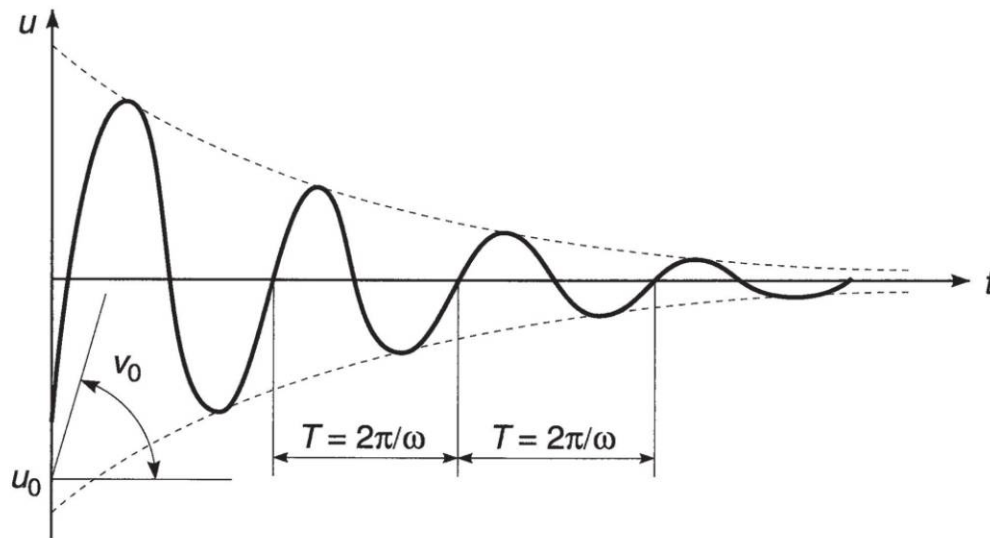


Figure 10.2

10.1.2 Cas d'une excitation harmonique

L'excitation harmonique est caractérisée par :

$$p(t) = p_0 \sin \alpha t$$

(de telles forces sont souvent engendrées par des machines).

La solution de l'équation (10.1) est :

$$u(t) = \frac{p_0 \lambda}{k} \left[[(\xi \sin \theta - \beta \cos \theta) \sin \omega t + \sin \theta \cos \omega t] e^{-\xi \omega t} + \sin(\alpha t - \theta) \right] \quad (10.7)$$

$$\text{en posant} \quad \beta = \frac{\alpha}{\omega} \quad \lambda = \frac{1}{1 - \beta^2} \quad \theta = \arctan \frac{2\xi\beta}{1 - \beta^2}$$

En fait, très rapidement, après un régime transitoire, le mouvement trouve un régime permanent caractérisé par :

$$u(t) = \frac{p_0 \lambda}{k} \sin(\alpha t - \theta) \quad (10.8)$$

On note que si $\omega = \alpha$, on a $\beta = 1$ d'où λ infini et par conséquent u : il y a résonance.

10.1.3 Cas d'une impulsion

■ **L'impulsion est caractérisée par la courbe de la figure 10.3**

Soit $p(t) = p_0 \frac{t}{t_0}$

(cela peut être représentatif de l'effet d'une explosion).

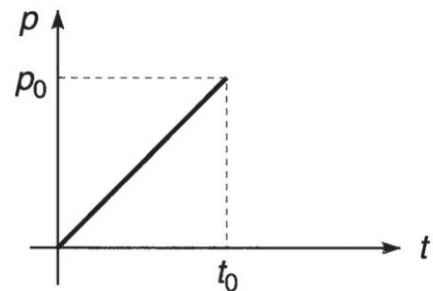


Figure 10.3

La solution de l'équation (10.1) est pour $0 \leq t \leq t_0$

$$\left. \begin{aligned} u(t) &= \frac{p_0}{m\omega^3 t_0} \left[(2\xi \cos \omega t - \sin \omega t) e^{-\xi \omega t} + \omega t - 2\xi \right] \\ v(t) &= \frac{p_0}{m\omega^2 t_0} \left[1 - (\cos \omega t + \xi \sin \omega t) e^{-\xi \omega t} \right] \end{aligned} \right\} \quad (10.9)$$

Au-delà de t_0 , le mouvement est celui d'un oscillateur libre (formule 10.5) avec $u_0 = u(t_0)$ et $v_0 = v(t_0)$ des formules (10.9).

■ **L'impulsion est caractérisée par la courbe de la figure 10.4**

Soit $p(t) = p_0$

(cela peut être représentatif de l'application instantanée d'une charge).

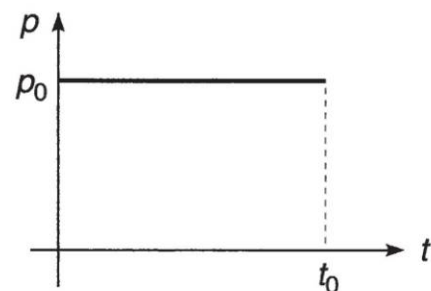


Figure 10.4

pour $0 \leq t \leq t_0$

$$\left. \begin{aligned} u(t) &= \frac{p_0}{m\omega^2} \left[1 - (\xi \sin \omega t + \cos \omega t) e^{-\xi \omega t} \right] \\ v(t) &= \frac{p_0}{m\omega} e^{-\xi \omega t} \sin \omega t \end{aligned} \right\} \quad (10.10)$$

10.1.4 Cas d'une excitation par déplacement de l'appui

La force extérieure appliquée à la masse est nulle

$$p(t) = 0$$

Par contre, l'appui n'est plus considéré comme fixe ; dans la direction du degré de liberté il subit un déplacement $\delta(t)$. (Cela peut être représentatif de l'effet d'un séisme.)

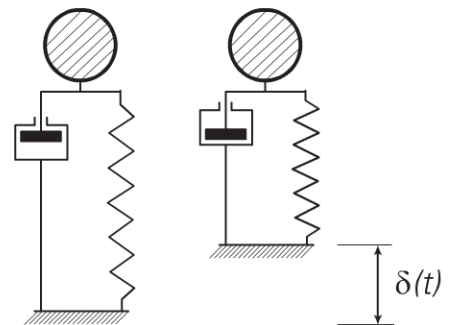


Figure 10.5

On peut démontrer que ce problème se ramène à l'étude de l'oscillateur simple dont l'appui est fixe et la masse soumise à une force fictive proportionnelle à l'accélération de l'appui :

$$p(t) = -m \frac{d^2 \delta}{dt^2}(t) \quad (10.11)$$

L'intégrale de la formule (10.2) permet alors de calculer $u(t)$.

10.1.5 Cas d'un choc

Considérons une masse m_1 dans un champ d'accélération g , tombant d'une hauteur h sur la masse m . L'origine des temps est d'abord choisie au moment où la masse m_1 de poids P_1 ($P_1 = m_1 g$) est lâchée.

Après être tombée d'une hauteur h , elle vient en contact

avec la masse m , au bout d'un temps $t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$; elle est

alors animée d'une vitesse $v_0 = \sqrt{2gh}$. La masse m_1 est

supposée rester au contact avec la masse m .

Le temps t_0 est pris comme origine pour étudier le mouvement ; $u(t)$ résulte de l'application de la formule (10.2), en considérant que :

- la force excitatrice est P_1 ;
- la masse en mouvement est $(m + m_1)$;
- les conditions aux limites sont pour $t = 0$

$$u(0) = 0 \quad m_1 v_0 = (m + m_1) \frac{du}{dt}(0)$$

(conservation de la quantité de mouvement au moment du contact).

On obtient finalement :

$$u(t) = \frac{P_1}{k} \left[1 + \left[\left(\frac{\omega}{g} v_0 - \xi \right) \sin \omega t - \cos \omega t \right] e^{-\xi \omega t} \right] \quad (10.12)$$

avec $\omega^2 = \frac{k}{m + m_1}$

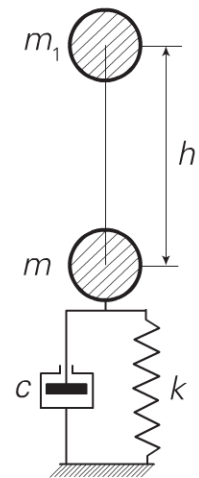


Figure 10.6

Application

Cas d'une charge de masse m_1 tombant d'une hauteur h sur une poutre sur deux appuis simples de masse m' par unité de longueur.

On pose :

$$m = 0,49 \ell m'$$

$$P = (m_1 + m)g$$

$$P_1 = m_1 g$$

$$k = \frac{48EI}{\ell^3}$$

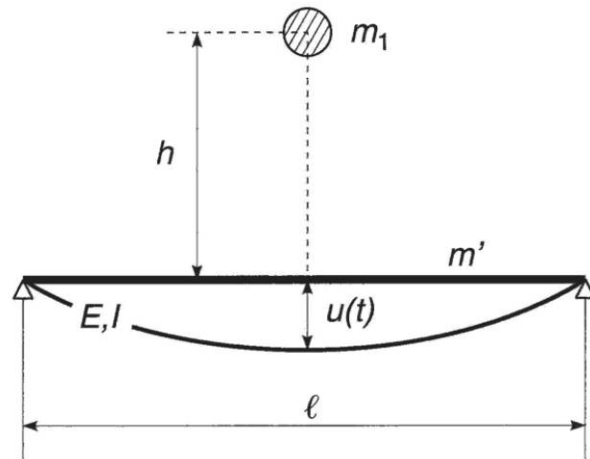


Figure 10.7

Au droit du point de chute, l'amplitude du déplacement est :

$$u(t) = \frac{P_1}{k} \left(1 - \cos \omega t + \sqrt{\frac{2hk}{P}} \sin \omega t \right)$$

et celle de la force exercée :

$$F(t) = ku(t)$$

Elle a pour valeur maximale :

$$F_{\max} = P_1 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2hk}{P}} \right)$$

10.2 Oscillateur simple avec rotation

Formules fondamentales

On considère une masse m reliée par une barre infiniment rigide à un support O caractérisé par un ressort angulaire de coefficient k_c (couple de rappel proportionnel à la rotation : $k_c \theta$) et un amortissement de coefficient c_c (couple d'amortissement proportionnel à la vitesse angulaire : $c_c \cdot d\theta/dt$).

La masse est soumise à l'action d'un couple $p(t)$ variable avec le temps qui conduit à un déplacement $\theta(t)$.

On peut faire une analyse analogue à celle conduite au paragraphe 10.1 ;

la masse m subit une accélération angulaire $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ qui provoque au niveau O un couple :

$$C(t) = m\ell^2 \frac{d^2\theta}{dt^2}(t) = J_0 \frac{d^2\theta}{dt^2}(t) \quad (10.13)$$

On pose $m\ell^2 = J_0$, appelé inertie massique. J_0 joue le rôle tenu par m dans la formule (J.1).

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}(t) + 2\omega\xi \frac{d\theta}{dt}(t) + \omega^2 \theta(t) = \frac{p(t)}{J_0} \quad (10.14)$$

ω est la pulsation, telle que $\omega^2 = \frac{k_c}{J_0}$ et $\xi = \frac{c_c}{2J_0\omega}$

Le couple dans le ressort peut être calculé par l'une des deux méthodes suivantes :

– soit en considérant le couple de rappel :

$$C(t) = k_c \theta(t) \quad (10.15)$$

– soit en considérant l'inertie massique J_0 soumise à une pseudo-accelération :

$$\gamma(t) = \omega^2 \theta(t)$$

d'où :

$$C(t) = J_0 \gamma(t) \quad (10.16)$$

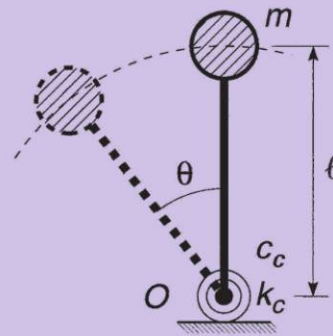


Figure 10.8

10.2.1 Cas du massif indéformable

Pour un ensemble de masses m_i reliées rigidement entre elles et au ressort k_j , l'inertie massique de l'ensemble est

$$J_0 = \sum m_i \ell_i^2$$

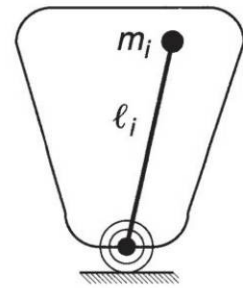


Figure 10.9

10.2.2 Cas du parallélépipède posé sur un ressort (par exemple le sol)

$$J_0 = \frac{m}{12}(a^2 + 4b^2)$$

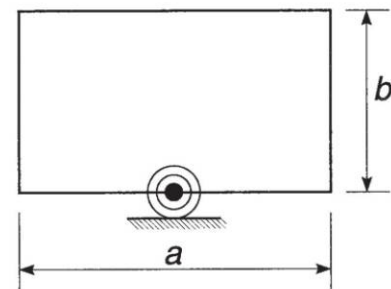


Figure 10.10

m représente la masse totale.

10.3 Oscillateur multiple

Formules fondamentales

Un oscillateur multiple est composé de p masses m_i reliées entre elles et à une base fixe.

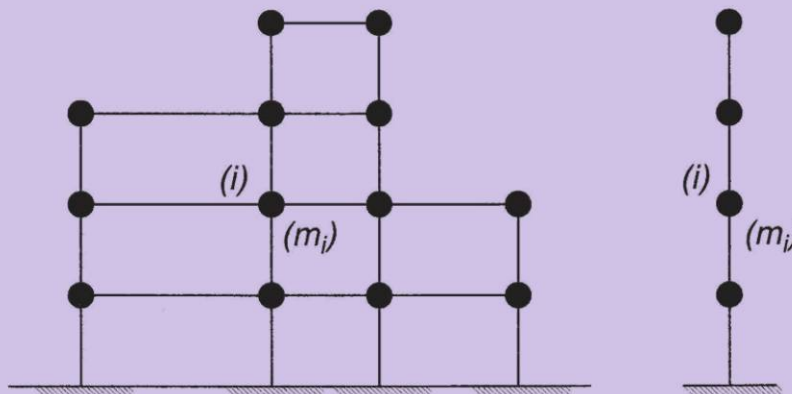


Figure 10.11

Chaque masse possède un certain nombre de degrés de liberté ; désignons par n le nombre total des degrés de liberté pour l'ensemble des p masses. Dans la pratique, on considère très souvent un seul degré de liberté par masse (translation) ; le nombre total de degrés de

liberté est alors égal au nombre des masses. Nous nous plaçons dans ce cas pour la suite.

L'ensemble des forces F_i sur chaque masse constitue le vecteur-force $[F]$; de même, l'ensemble des déplacements u_i de chaque masse constitue le vecteur-déplacement $[U]$. Les vecteurs $[F]$ et $[U]$ sont reliés par la relation :

$$[F] = [K][U]$$

où $[K]$ est la matrice de rigidité (cf. paragraphe 5.7).

Par ailleurs, lorsque toutes les masses sont accélérées, les forces d'inertie ont pour valeurs :

$$F_i = m_i \frac{d^2 u_i}{dt^2}$$

soit pour l'ensembles des masses :

$$[F] = [M] \left[\frac{d^2 U}{dt^2} \right]$$

où $[M]$ est la matrice diagonale, des masses.

Les matrices $[K]$ et $[M]$ sont d'ordre $n \times n$.

L'écriture de l'équilibre de l'ensemble des forces mises en jeu conduit à la conclusion que le déterminant de la matrice $([K] - \omega^2 [M])$ doit être nul.

$$\| [K] - \omega^2 [M] \| = 0 \quad (10.17)$$

Le développement de ce déterminant conduit à une équation de degré n en ω^2 ; sa résolution fournit les valeurs des pulsations $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ classées habituellement dans un ordre croissant.

10.3.1 Les modes propres

À chacune des pulsations ω_j correspond un *mode propre de vibration*, caractérisé par une déformation particulière de la structure. Cette déformation se développe en fonction du temps en présentant une période :

$$T_j = \frac{2\pi}{\omega_j}$$

10.3.2 Les vecteurs modaux

Pour un mode propre j , chaque masse m_i subit un déplacement d_{ji} en cas d'oscillations libres ; l'ensemble de ces déplacements constitue le vecteur modal $[D_j]$; il est déterminé à un coefficient près, en écrivant :

$$([K] - \omega_j^2 [M])[D_j] = 0$$

10.3.3 Effet d'oscillations forcées

Dans le cas des oscillations forcées, chaque masse m_i subit l'excitation $P_i(t)$.

Pour chaque mode j , on peut écrire une expression analogue à celle établie pour l'oscillateur simple (10.1) :

$$\frac{d^2 y_j}{dt^2} + 2\xi\omega_j \frac{dy_j}{dt} + \omega_j^2 y_j = \frac{p_j(t)}{m_j} \quad (10.19)$$

en posant $m_j = \sum m_i d_{ji}^2$ (masse modale)

$p_j(t) = \sum d_{ji} p_i(t)$ (excitation modale).

La solution de l'équation (10.19) est fournie par l'intégrale de Duhamel :

$$y_j(t) = \frac{1}{m_j \omega_j} \int_0^t p_j(\tau) e^{-\xi \omega_j (t-\tau)} \sin[\omega_j (t-\tau)] d\tau \quad (10.20)$$

Le déplacement de masses m_i dans le mode j est alors :

$$[U_j] = y_j(t)[D_j]$$

Pour l'ensemble des modes propres, on obtient par superposition :

$$[U] = \sum_{j=1}^{j=n} [U_j] \quad (10.21)$$

Les forces F_i sont calculées :

$$\left. \begin{array}{l} \text{▶ soit par } [F] = [K][U] = \Sigma [K][U_j] \\ \text{▶ soit par } [F] = [M]\Sigma \omega_j^2 [U_j] = [M][\gamma] \end{array} \right\} \quad (10.22)$$

$[\gamma]$ est le vecteur des pseudo-accélérations.

Remarques

- On pose $M_j = \frac{(\sum m_i d_{ji})^2}{m_j}$, masse modale participative ; pour l'évaluation des sollicitations, les effets des modes supérieurs à k peuvent être négligés si :

$$\sum_1^k M_j > 0,9 \sum_1^n M_j$$

- Dans le cas d'une excitation par déplacement de l'appui $\delta(t)$, on peut démontrer que l'étude se ramène à celle du même oscillateur supposé fixe au niveau de l'appui, chaque masse étant soumise à une force excitatrice :

$$p_i(t) = -m_i \frac{d^2 \delta}{dt^2}.$$

Exemple d'application

On considère une console verticale caractérisée par un module (E) de 32 000 MPa et un moment quadratique (I) de 5 m⁴. Elle supporte deux masses, l'une au niveau 1 (+ 24 m) de 100 tonnes, l'autre au niveau 2 (+ 28 m) de 80 tonnes.

Ces masses sont soumises à une impulsion du type de celle définie au paragraphe 10.1.3, figure 10.3 :

$$p(t) = p_0 \frac{t}{t_0}$$

avec $t_0 = 0,3$ seconde et p_0 respectivement égal à 55 kN et 45 kN aux niveaux 1 et 2, dirigée perpendiculairement à la console.

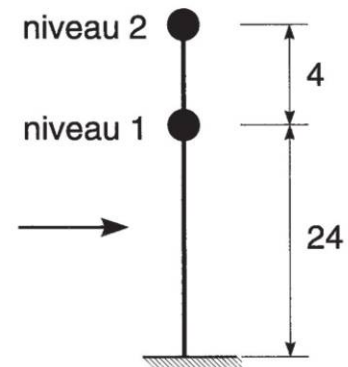


Figure 10.12

Matrice de rigidité [K]

On considère la console de la figure 10.12, soumise à l'action des forces f_1 et f_2 . Les formules du paragraphe 4.7 (cas 1) permettent de calculer

$$u_1 = 2,88 \cdot 10^{-5} f_1 + 3,60 \cdot 10^{-5} f_2$$

$$u_2 = 3,60 \cdot 10^{-5} f_1 + 4,57 \cdot 10^{-5} f_2$$

(u en m et f en kN) soit sous forme matricielle

$$[U] = [S][F] \text{ avec } [S] = 10^{-5} \begin{vmatrix} 2,88 & 3,60 \\ 3,60 & 4,57 \end{vmatrix}$$

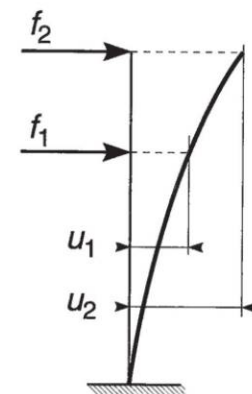


Figure 10.13

$$[F] = [K][U] \text{ soit } [K] = [S]^{-1} = 10^{-5} \begin{vmatrix} 22,7 & -17,9 \\ -17,9 & 14,3 \end{vmatrix}$$

Matrice des masses

$$[M] = \begin{vmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 80 \end{vmatrix}$$

Recherche des pulsations propres (formule 10.17)

$$\begin{vmatrix} 22,7 \cdot 10^{-5} - 100\omega^2 & -17,9 \cdot 10^5 \\ -17,9 \cdot 10^5 & 14,3 \cdot 10^5 - 80\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

soit : $\omega^4 - 40\,625 \omega^2 + 6\,212\,500 = 0$

dont les racines sont : $\omega^2 = 40\,500$ et 154 .

Les principaux résultats sont rassemblés dans le tableau suivant.

Tableau 10.1

Mode	ω^2	ω	T	d_{j1}	d_{j2}	m_j t	M_j t	ΣM_j	%
1	154	12,4	0,51	0,8	1	144	178	178	98,9
2	40 500	201	0,03	-1	1	180	2	180	100

Vecteurs modaux (formule 10.18) :

$$(22,7 \cdot 10^5 - 100 \times 154)d_{11} - 17,9 \cdot 10^5 d_{12} = 0$$

posons : $d_{12} = 1 \quad d_{11} = 0,8$

$$(22,7 \cdot 10^5 - 100 \times 40\,500)d_{21} - 17,9 \cdot 10^5 d_{22} = 0$$

posons : $d_{22} = 1 \quad d_{21} = -1$

Masses modales et masses modales participatives

$$m_j = \sum m_i d_{ji}^2 \qquad M_j = \frac{\left(\sum m_i d_{ji} \right)^2}{m_j}$$

$$m_1 = 100 \times 0,8^2 + 80 \times 1^2 = 144t \qquad M_1 = \frac{(100 \times 0,8 + 80 \times 1)^2}{144} = 178t$$

$$m_2 = 100 \times 1 + 80 \times 1 = 180t \qquad M_2 = \frac{(-100 \times 1 + 80 \times 1)^2}{180} = 2t$$

On constate que le premier mode est largement prépondérant, M_1 représente pratiquement la totalité de la masse. L'effet de l'excitation sera donc étudié sous l'effet du seul premier mode.

Effet de l'impulsion

Fonction $y_1(t)$ (formule 10.20) ; la solution de l'intégrale est donnée par la formule (10.9) :

$$y_1(t) = \frac{p_{01}}{m_1 \omega_1^3 t_0} \left[(2\xi \cos \omega_1 t - \sin \omega_1 t) e^{-\xi \omega_1 t} + \omega_1 t - 2\xi \right]$$

p_{01} est l'excitation modale correspondant au premier mode :

$$p_{01} = \sum d_{1i} p_{0i} = (0,8 \times 55 + 1 \times 45) = 89 \text{ kN}$$

$$y_1(t) = \frac{89}{144 \times 12,4^3 \times 0,3} \left[(2 \times 0,05 \cos 12,4t - \sin 12,4t) e^{-0,05 \times 12,4t} + 12,4t - 2 \times 0,05 \right] = 1,08 \cdot 10^{-3} A(t)$$

en posant $A(t) = (0,1 \cos 12,4t - \sin 12,4t) e^{-0,62t} + 12,4t - 0,1$

Déplacements : $[U] = [U_1] = y_1(t)[D_1]$

$$u_1 = 1,08 \cdot 10^{-3} A(t) \times 0,8 = 0,86 \cdot 10^{-3} A(t) m$$

$$u_2 = 1,08 \cdot 10^{-3} A(t) \times 1 = 1,08 \cdot 10^{-3} A(t) m$$

Forces : $[F] = [K][U]$

$$\begin{aligned} f_1 &= 22,7 \cdot 10^5 \times 0,86 \cdot 10^{-3} A(t) - 17,9 \cdot 10^5 \times 1,08 \cdot 10^{-3} A(t) \\ &= 19 A(t) \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2 &= -17,9 \cdot 10^5 \times 0,86 \cdot 10^{-3} A(t) + 14,3 \cdot 10^5 \times 1,08 \cdot 10^{-3} A(t) \\ &= 5 A(t) \text{ kN} \end{aligned}$$

Moment à l'encastrement :

$$M = 19 A(t) \times 24 + 5 A(t) \times 28 = 600 A(t) \text{ kN.m}$$

$$t = 0,3 \text{ s} \quad A(t) = 4 \quad M = 2\,400 \text{ kN.m}$$

Au-delà de 0,3 s, l'oscillateur est libre ; à partir de la formule (10.5), on obtient :

$$M = (122 \sin 12,4t + 2\,400 \cos 12,4t) e^{-0,62t} \text{ (kN/m)}$$

en réinitialisant le temps à 0,3 seconde.

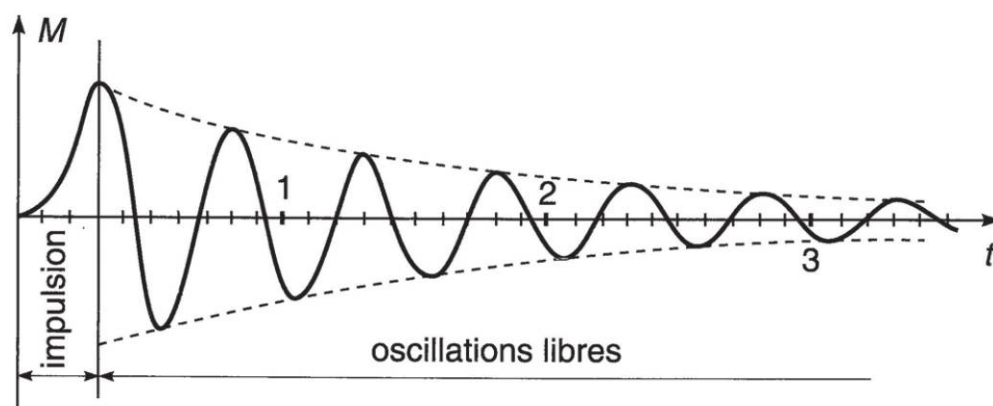


Figure 10.14

10.4 Pulsation du mode propre fondamental

Formule de Rayleigh

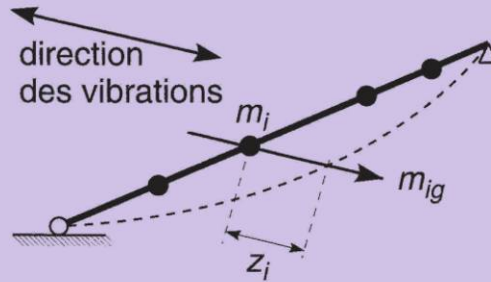


Figure 10.15

On considère une poutre quelconque de masse négligeable et solidaire de p masses m_i . Par des considérations énergétiques, on peut relier la pulsation du mode propre fondamental (mode propre présentant la plus faible pulsation) à la déformée statique de la poutre sollicitée par des forces $m_i g$ dirigées parallèlement à la direction des déplacements de vibration.

$$\omega^2 = g \frac{\sum_1^p m_i z_i}{\sum_1^p m_i z_i^2} \quad (10.23)$$

La méthode s'applique non seulement aux poutres droites, mais aux poutres courbes, portiques, arcs, plaques...

Cas particulier d'une seule masse

$$\omega^2 = \frac{g}{z}$$

10.4.1 Formulaire dans le cas de masses uniformément réparties

Tableau 10.2 Valeur de k

■ Cas 1 : poutres à une travée

$$\omega^2 = k \frac{EI}{m\ell^4}$$

où m est la masse répartie par unité de longueur ;

k dépend des conditions d'appui ;

ℓ est la portée.

	$k = 12,4$
	$k = 97,4$
	$k = 237$
	$k = 504$

■ Cas 2 : portiques à deux montants articulés

On reprend les notations du paragraphe 5.7.3 (cas 3) ; de plus, on note respectivement m_h et m_ℓ les masses réparties sur les montants et la traverse. L'excitation est supposée parallèle à la traverse.

$$\omega^2 = \frac{12EI}{\ell h^2 \left[(2k + 1)m_\ell \ell + 2m_h h \frac{204k^2 + 168k + 35}{105(2k + 1)} \right]}$$

■ Cas 3 : arcs à deux articulations

On reprend les notations du paragraphe 5.8.1 ; de plus, on note f la flèche de l'arc et on pose $\delta = \frac{f}{\ell}$.

On suppose Ω' et I' constants. L'excitation est parallèle à l'axe x de la figure 5.140.

Cas d'un arc parabolique :

$$\omega^2 = \frac{120EI'}{(0,076 + 1,18^2)m\ell^4}$$

Cas d'un arc sinusoïdal :

$$\omega^2 = \frac{120EI'}{(0,077 + 0,84\delta^2)m\ell^4}$$

■ Cas 4 : plaques rectangulaires

On considère une plaque rectangulaire de portée a et b ($a \leq b$) et d'épaisseur h ; m est la masse par unité de surface.

$$\omega^2 = k \frac{Eb^3}{ma^4}$$

Tableau 10.3 Valeurs de k

b/a	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	∞
	33,2	17,3	13,0	11,2	10,3	8,3
	47,7	30,4	25,6	23,6	22,6	20,3
	110	62,1	51,4	48,2	45,8	42,7

■ Cas 5 : plaques circulaires

On considère une plaque circulaire de rayon a et d'épaisseur h ; m est la masse par unité de surface.

$$\omega^2 = k \frac{Eh^3}{ma^4}$$

plaque simplement appuyée : $k \simeq 1,8$;

plaque encastrée : $k \simeq 9$.

Remarque

Pour un élément de structure, on appelle masse concentrée équivalente m' en un point, une fraction de la masse répartie totale qui, appliquée en ce point, donne le même comportement dynamique que la masse répartie ; pour obtenir m' , il suffit d'écrire l'équivalence des pulsations du mode fondamental. Par exemple :

■ Cas d'une console : masse concentrée équivalente en tête

$$\omega^2 = \frac{12,4EI}{m\ell^4} = \frac{3EI}{m'\ell^3} \quad \text{soit} \quad m' = 0,24m\ell$$

■ Cas d'une poutre sur deux appuis simples, en son centre

$$\omega^2 = \frac{98EI}{m\ell^4} = \frac{48EI}{m'\ell^3} \quad \text{soit} \quad m' = 0,49m\ell$$

■ Cas d'une plaque carrée simplement appuyée, en son centre

$$\omega^2 = 33,2 \frac{Eh^3}{ma^4} = \frac{Eh^3}{0,127m'a^2} \quad \text{soit} \quad m' = 0,24ma^2$$

Index

A

Anneau 34, 158
 circulaire 285
 flambement 284
Appui
 dénivelé 109, 115
 élastique 129, 137
 élastique continu 243
Arc
 à deux articulations 192, 327
 à trois articulations 67
 circulaire 284
 circulaires 200
 de circonférence 35
 de moment quadratique réduit
 uniforme 284
 de parabole 36
 encastré 193
 flambement 284
 hyperstatique 191
 parabolique 90, 196
As de carreau 168
Axe neutre 8
Axes principaux 7

B

Barré (théorème) 61
Bow-string 195
Bresse
 (formule) 49, 191
 (terme) 192

C

Câble tendu 84, 110, 116
Cadres fermés 188
Castigliano (théorème) 44, 94
Centre
 de pression 8
 de surface 25, 30
 de torsion 13
Cercle 29
 de Mohr 18
Changement d'axe 26
Charge
 axiale 88
 parabolique 82, 109, 115
 répartie partielle 198
 trapézoïdale 81, 109, 114
 triangulaire 72, 78, 79, 80, 107,
 108, 113, 114, 145

uniforme partielle 75, 76, 106, 112
 Choc 315
 Clapeyron
 équation 119
 théorème 43
 Coefficient
 de raideur de la plaque 205
 de sécurité 23
 de souplesse 103
 Console 281
 formulaire 71
 potence 57
 Contraintes 3
 admissibles 23
 de cisaillement 11, 15
 normale 5, 6, 7
 principales 19
 Coques cylindriques 252
 Coupole sphérique 247
 Courbe intrinsèque 21
 Cremona (tracé) 65

D

Déformation plastique 289
 Dénivellations d'appui 121
 Déplacement de l'appui 314
 Déversement des poutres 281
 Duhamel (intégrale) 320

E

Effort
 alterné répété 24
 de glissement longitudinal 12
 normal 4, 5
 tranchant 4, 10, 14

Élancement de la pièce 266
 Ellipse 35
 Équation des trois moments 119
 États limites 23
 Euler (charge critique) 265
 Excitation harmonique 312

F

Flambement 265
 selon l'Eurocode 3 276
 Flexion
 composée 8
 déviée 7
 plane simple 6
 Fontviolant (équation) 48
 Forces extérieures (travail) 43
 Fréquence 311

G

Gradient de température 110, 116, 204, 244

H

Hooke (loi de) 4

I

Impulsion 313
 Inertie massique 317

L

Lagrange (équation) 206
 Lignes d'influence 52, 97, 98, 126
 Limite d'endurance 24
 Losange 28

M

Masse modale participative 321
 Massif 21

Matrice
 de rigidité 172, 319
 des masses 319
 Maxwell-Betti (théorème) 45, 53, 97, 117
 Menabrea (théorème) 44
 Méthode des rotations 176
 Mode propre fondamental 326
 Modes propres 319
 Module
 d'élasticité 5, 12, 15
 de réaction 137
 Mohr
 cercle 18
 formule 46, 67
 Moment
 de flexion 4, 6, 10
 de torsion 4, 13, 15
 produit 26
 quadratique 7, 25
 quadratique polaire 16
 statique 25

N

Navier-Bernoulli (hypothèse) 4
 Noyau central 9

O

Oscillateur
 libre 311
 multiple 318
 simple 310, 317

P

Paraboloïde hyperbolique 250
 Plaque
 annulaire 237

carrée 299, 300, 301
 circulaire 232, 295, 329
 elliptique 240
 rectangulaire 207, 209, 302, 303, 304, 305, 306
 rectangulaire (voilement) 286
 triangulaire 241
 Portique 70, 169, 275, 327
 Potentiel interne 43
 Poutre
 accordéon 87
 à une travée 327
 avec appuis rotulés 88
 circulaire 152, 155, 157
 continue 119
 croisée 134
 d'axe vertical 89
 demi-infinie 142
 finie 149
 infinie 140
 infiniment rigide 131, 133
 sur appuis simples 74, 273, 282
 sur deux appuis de niveaux différents 85
 warren 66

Poutre infiniment rigide 136

Poutres

à une travée 101

Profilés minces ouverts 17

Pulsation 310, 317, 326

R

Rayleigh (formule) 326

Rayon

de courbure 7

de giration 26

Rectangle 27

Ritter (méthode) 66

S

Saint-Venant (principe) 5

Section

circulaire annulaire 40

en T 27

rectangulaire 9, 16, 17, 37

Sophie Germain (équation) 206

T

Trapèze 29

Travaux virtuels 47

Treillis 36, 63

Tresca (critère) 24

Triangle 28

Tube 285

mince fermé 18

mince ouvert 17

V

Vecteurs modaux 320

Voile

cylindrique 287

mince 246, 287

sphérique 288

Voilement 286

Von Mises (critères) 24