BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES - GROUPEMENT C1

SESSION 2019

DURÉE : 2 HEURES

SPÉCIALITÉS	**COEFFICIENT**
Conception des processus de découpe et d'emboutissage	2
Conception des processus de réalisation de produits (2 options)	2
Conception et réalisation en chaudronnerie industrielle	2
Conception et réalisation en construction navale	2
Développement et réalisation bois	2
Fonderie	2
Forge	2
Industries céramiques	2
Innovation textile (2 options)	3
Maintenance des matériels de construction et de manutention	2
Maintenance des véhicules (3 options)	2
Moteur à combustion interne	2
Pilotage des procédés	3
Systèmes constructifs bois et habitat	2
Techniques et services en matériels agricoles	2

Matériel autorisé :
L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (10 points)

Partie A : modélisation

On s'intéresse à la chute d'un parachutiste, avant l'ouverture du parachute.

On admet que la vitesse V du parachutiste pendant la chute peut être modélisée par une fonction solution de l'équation différentielle :

$$m\,y'(t) + k\,y(t) = mg$$

où m est la masse totale du parachutiste et de son parachute, k est un coefficient dépendant de la résistance de l'air, g est le coefficient de l'accélération de la pesanteur et t représente le temps.

V est exprimée en m.s $^{-1}$, m est exprimée en kilogramme et t est exprimé en seconde.

Dans la suite du problème, on considère que m = 80 kg, k = 25 unités S.I. et g = 10 m.s^{-2}.

Au début de la chute, t = 0 s et $V\,(0) = 0$ m s^{-1}.

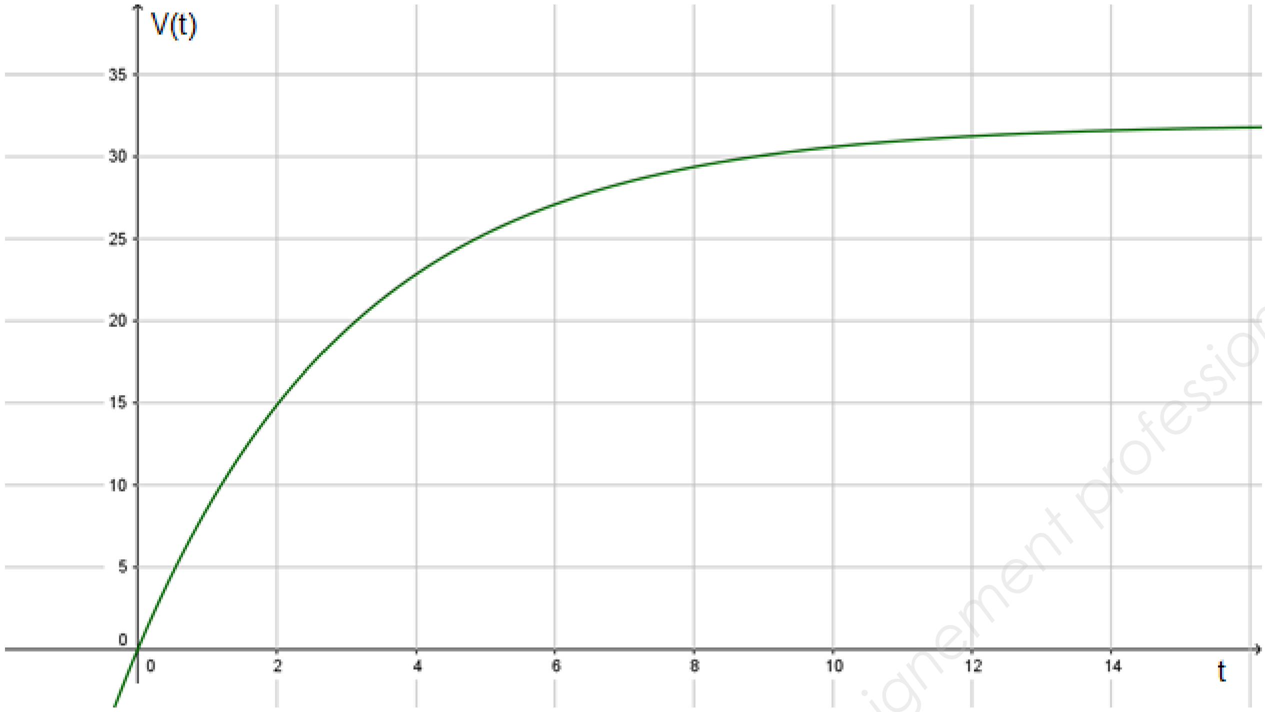
1. Montrer que la fonction V est solution de l'équation différentielle :
   (E) : $y' + 0{,}3125y = 10$
2. Résoudre l'équation différentielle :
   (E_0) : $y' + 0{,}3125\,y = 0$
3. Déterminer une fonction constante solution de (E).
4. En déduire les solutions générales de (E).
5. Déterminer une expression de la vitesse $V(t)$ du parachutiste à l'instant t.

Partie B : étude de la chute

On admet que la vitesse du parachutiste est modélisée par la fonction V de la variable t définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$ par :

$$V(t) = 32\,(1 - \mathrm{e}^{-0{,}3125\,t})$$

On donne ci-dessous la représentation graphique Γ de cette fonction V dans un repère orthogonal.



1. a. Estimer une valeur arrondie de l'instant t_0 à partir duquel la vitesse dépasse 20 m.s^{-1}.

   b. Retrouver par le calcul la valeur exacte de t_0.

Un logiciel de calcul formel donne le résultat suivant que l'on admet et qui pourra être exploité dans les questions suivantes.

1	$f(x) := 32(1 - exp(-0{,}3125 \times x))$
	$x \to 32(1 - \mathrm{e}^{-0{,}3125x})$
2	*Limite(f(x), +∞)*
	32

2. a. Donner l'expression $V'(t)$ de la dérivée de la vitesse.

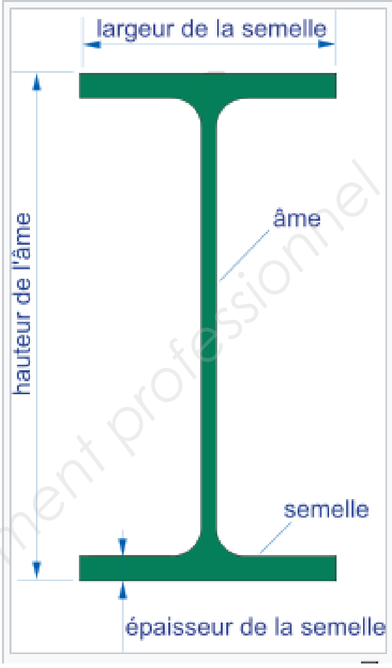
   b. Etudier le sens de variations de V sur [0 ; + ∞ [.

3. Le parachutiste peut-il atteindre une vitesse de 130 km.h^{-1} ?
4. Calculer la vitesse moyenne du parachutiste lors des deux premières secondes de chute. On pourra arrondir à l'unité.

On rappelle que la valeur moyenne d'une fonction *f* sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ est $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$.

Exercice 2 (10 points)

Une fonderie fabrique en grande quantité des poutrelles métalliques de type IPE 120. On donne ci-contre le schéma de coupe d'une poutrelle de ce type.



Les dimensions, en millimètre, d'une poutrelle de ce type sont :

- hauteur de l'âme : 120 mm
- largeur de la semelle : 64 mm
- épaisseur de l'âme : 4,4 mm
- épaisseur de la semelle : 6,3 mm

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A : dimensions externes

Lors d'un contrôle de qualité on constate que :

- la hauteur de l'âme est conforme pour 98 % des poutrelles ;
- lorsque la hauteur de l'âme est conforme, la largeur de la semelle est également conforme dans 99 % des cas.

On choisit une poutrelle au hasard dans la production et on considère les événements suivants :
H : « la hauteur de l'âme est conforme »
L : « la largeur de la semelle est conforme ».

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

2. On dit que les dimensions externes d'une poutrelle sont conformes lorsque la hauteur de l'âme et la largeur de la semelle sont conformes. On note E cet événement.
Justifier que $P(E) = 0{,}9702$.

3. Sachant que la largeur de la semelle est conforme pour 98,5 % des poutrelles, l'affirmation suivante est-elle exacte ? La réponse devra être justifiée par un calcul.
« 26 % des poutrelles dont la hauteur d'âme est non conforme présentent également un défaut de largeur de la semelle. »

4. On prélève au hasard 20 poutrelles. La production est suffisamment importante pour assimiler ce prélèvement à des tirages avec remise. On note N la variable aléatoire qui, à chaque lot de 20 poutrelles prélevées au hasard, associe le nombre de poutrelles dont les dimensions externes sont conformes.

a. Déterminer en justifiant la loi de probabilité de la variable aléatoire N et préciser ses paramètres.

b. Calculer la probabilité qu'un lot de 20 poutrelles contienne au moins une poutrelle dont les dimensions externes sont non conformes. Arrondir le résultat à 10^{-3}.

Partie B : épaisseur de l'âme

La variable aléatoire X qui, à chaque poutrelle, associe l'épaisseur de son âme (en millimètre) suit la loi normale d'espérance $m = 4{,}4$ et d'écart type $\sigma = 0{,}02$.
L'épaisseur de l'âme est conforme si l'écart entre la valeur réelle et la valeur théorique (4,4 mm) est inférieur ou égal à 1 % de la valeur théorique.
Calculer la probabilité qu'une poutrelle, prélevée au hasard dans la production, ait une épaisseur d'âme conforme. Arrondir le résultat 10^{-3}.

Partie C : contrôle de conformité

À la fonderie, une scie automatique débite de longues poutrelles en tronçons de longueur 2 m.
L est la variable aléatoire, qui à chaque poutrelle débitée par la scie, associe sa longueur (en mètre).
Si la scie est correctement réglée, la variable aléatoire L suit la loi normale d'espérance $\mu = 2$ et d'écart type $\sigma = 0{,}001$.
Pour vérifier si la scie est correctement réglée, un technicien de maintenance a prélevé un échantillon de 100 poutrelles et a obtenu une longueur moyenne de $\bar{l} = 1{,}9997$ m pour cet échantillon.
$\bar{L}$ est la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 100 poutrelles, associe la longueur moyenne des poutrelles de cet échantillon. Lorsque la scie est correctement réglée, $\bar{L}$ suit la loi normale d'espérance μ et d'écart type $\sigma_0 = \frac{\sigma}{10}$.
Le technicien construit un test bilatéral au seuil de 5 % pour tester l'hypothèse H_0 : « la longueur moyenne en mètre des poutrelles débitées par la scie est $m = 2$ ».

1. Donner l'hypothèse alternative H_1.

2. Déterminer l'intervalle $I = [2 - h\,; 2 + h]$, tel que, sous l'hypothèse H_0, $P(\bar{L} \in I) = 0{,}95$. Arrondir les bornes de l'intervalle à 10^{-4}.

3. Énoncer la règle de décision de ce test.

4. Au seuil de décision 5 %, le technicien peut-il estimer que la scie est bien réglée ?